22. Statisztika

I. Elméleti összefoglaló

Statisztikai sokaság, minta

A **statisztika** tömegjelenségekben érvényesülő tapasztalati törvényeket tár fel a sokaság részhalmazain (mintákon) elvégzett mérésekre alapozva.

- **Statisztikai sokaságnak** nevezzük az objektumok, események azon összességét, amelyre a statisztikai vizsgálat vonatkozik. A statisztikai sokaság tagjait **egyedeknek**, a sokaságot alkotó egyedek számát pedig a **statisztikai sokaság méretének** nevezzük.
- Az egyedek vizsgált tulajdonságait **ismérveknek**, az ismérv egy konkrét előfordulását pedig **adatnak** nevezzük.
- **Statisztikai mintának** nevezzük a statisztikai sokaság azon – valódi – részhalmazát, amelyről adatokkal rendelkezünk.
- A statisztikai mintával szemben alapkövetelmény, hogy **reprezentatív** legyen, azaz hűen tükrözze azt a sokaságot, amelyből való, és a lehető legtöbb információt nyújtsa a vizsgált ismérvvel kapcsolatos ismeretlen eloszlásról.

Gyakoriság, gyakorisági eloszlás, osztályokba sorolás

- Egy adat (abszolút) **gyakoriságán** azt a számot értjük, ahányszor az adat a mintában előfordul.
- A lehetséges adatokból és gyakoriságukból álló párok **gyakorisági eloszlást** alkotnak. A **gyakorisági táblázat** a lehetséges adatokat és azok gyakoriságait tartalmazza.
- Egy adat **relatív gyakoriságán** gyakoriságának és a minta elemszámának hányadosát értjük.
- A relatív gyakoriság százalékban kifejezett értékét **százalékos gyakoriságnak** nevezzük.
- A lehetséges adatokból és relatív gyakoriságukból álló párok **relatív gyakorisági eloszlást** alkotnak. A **relatív gyakorisági táblázat** a lehetséges adatokat és azok relatív gyakoriságait tartalmazza.

Adatok ábrázolása, rendszerezése

A minta adatainak jól megválasztott elrendezésével, ábrázolásával megkönnyíthetjük a vizsgálati szempontoknak megfelelő következtetések meghozatalát.

Táblázat: Az adatok áttekinthetőbbé, könnyebben feldolgozhatóvá válnak, ha táblázatba rendezzük őket.
A **grafikonok** általában sokkal szemléletesebbek a táblázatoknál, sűrítik az információt, átláthatóbbá teszik az adathalmazt. A hasonlóságok és különbségek könnyen észrevehetővé válhatnak.

Fontosabb grafikontípusok:

- **Görbe, vonaldiagram**: Derékszögű koordináta-rendszerben görbékkel vagy összefüggő töröttvonallal szemléltetjük az adatok változását, egymáshoz való viszonyát.
- **Oszlopdiagram**: Az ábrázolandó mennyiséggel arányos **magasságú** téglalapok (oszlopok) alkotják. Az oszlopok szélessége egyenlő, de szabadon megválasztható.
  - Akkor használjuk, ha az adatok változását, egymáshoz való viszonyát akarjuk szemléltetni.

- Akkor ne használjuk, ha van egy kiugróan nagy adat, mert akkor a többi nehezen összehasonlítható egymással. Akkor sem célszerű használni, ha nagyon kicsit térnek el egymástól az adatok.

- **Kördiagram**: Általában relatív gyakoriságok ábrázolására használjuk. Egy körben az ábrázolandó adatok relatív gyakoriságaival arányos **középponti szögű** körcikkek alkotják. A teljes kör jelenti a 100%-ot. A kördiagramon az egyes adatok gyakoriságát is fel lehet tüntetni.
  - Akkor használjuk, ha az egyes adatoknak az egészhez (100%-hoz), illetve az egymáshoz való viszonyát akarjuk szemléltetni.
  - Akkor ne használjuk, ha túl sok adat van, vagy ha kicsi adatok mellett nagyon nagy is szerepel, mert ebben az esetben nehéz az adatok összehasonlítása.
- **Tortadiagram**: A kördiagram térbeli megfelelője. A térbeli elforgatás miatt torzítja a középponti szögeket, ami megnehezíti az összehasonlításokat.

Középértékek

- A mintában leggyakrabban előforduló adatot a minta **móduszának** nevezzük. Ha több ilyen van, akkor azok a **móduszok halmazát** alkotják.
- A minta nagyság szerint rendezett adatai közül a középsőt **mediánnak** nevezzük. Páratlan számú ($2n+1$ db) adat mediánján a középső ($n+1$-edik) adatot értjük. Páros számú ($2n$ db) adat mediánja a két középső adat (n-edik és $n+1$-edik) számtani közepe.
- A statisztikai minta $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adatainak **számtani közepe**:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

- Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adatok $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ nemnegatív számokkal képzett **súlyozott számtani közepén** az

$$\overline{x} = \frac{k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3 + \cdots + k_n \cdot x_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$

számot értjük.

A szóródás jellemzői

- A **minta terjedelme** a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége.
- A minta $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adatainak az ***a* számtól való átlagos négyzetes eltérése**:

$$D_n^2(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

  - A minta átlagos négyzetes eltérése a számtani középtől számítva a minimális.
- A minta $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adatainak a számtani közepüktől való átlagos négyzetes eltérését a minta **szórásnégyzetének** nevezzük.

$$D_n^2 = D_n^2(\overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

- A minta **szórása** a szórásnégyzetéből vont négyzetgyök.

$$D_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

- A szórás és a szórásnégyzet néhány tulajdonsága:
  - A szórásnégyzet megadható, ha a minta elemei négyzetének átlagából kivonjuk a mintaközép négyzetét:

$$D_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

- A minta $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adatainak az ***a* számtól való átlagos abszolút eltérése**:

$$S_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|.$$

  - A minta $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adatainak az *M*-mel jelölt mediánjuktól való átlagos abszolút eltérését a minta **átlagos minimális eltérésének** nevezzük.

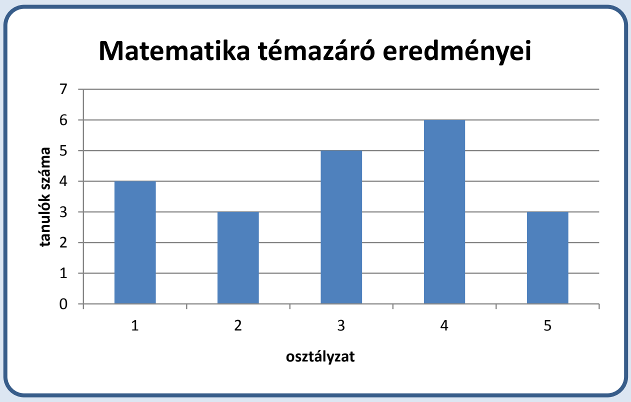
$$S_n(M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - M|.$$

  - A minta $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adatainak az $\overline{x}$ számtani közepüktől való átlagos abszolút eltérését a minta **átlagos abszolút eltérésének** nevezzük.

$$S_n(\overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|.$$

II. Kidolgozott feladatok

1. Egy csoport matematika témazáró dolgozatának eredményeit osztályzatok szerinti összesítésben az alábbi oszlopdiagram szemlélteti.



a) Olvassa le az eredményeket a diagramról, és készítsen táblázatot, amelyben megadja az osztályzatok gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

Az elkészített táblázat adataira támaszkodva válaszolja meg a következő kérdéseket!

b) Mennyi a csoportlétszám?
c) Hány tanuló osztályzata lett négyesnél gyengébb?
d) A tanulók hány százaléka kapott hármast?
e) A tanulók hányad része, illetve hány százaléka kapott hármasnál rosszabb jegyet?
f) Mennyi a dolgozat során elért csoportátlag?
g) Mennyi a jegyek módusza és mediánja?
h) Mennyi a jegyek átlagos abszolút eltérése és átlagos minimális eltérése?
i) Mekkora a jegyek szórása?

Megoldás:

a) Az osztályzatok gyakorisága és relatív gyakorisága:

osztályzat	gyakoriság	relatív gyakoriság
1	4	$\frac{4}{21}$
2	3	$\frac{3}{21}$
3	5	$\frac{5}{21}$
4	6	$\frac{6}{21}$
5	3	$\frac{3}{21}$
csoportlétszám:	21	

b) A csoportlétszámot a jegyek gyakoriságainak összege adja, ami: 21.

c) A négyesnél gyengébb tanulók számát az 1-es, a 2-es és 3-as osztályzat gyakoriságainak összege adja, ami: 12.

d) A 3-as eredményűek százalékos gyakoriságát a 3-as jegy relatív gyakoriságának százalékban kifejezett értéke adja meg, és az: $\frac{5}{21} \approx 23{,}8\%$.

e) A hármasnál rosszabb eredményt elért tanulók arányát megkapjuk, ha az 1-es és 2-es osztályzat gyakoriságainak összegét elosztjuk az osztálylétszámmal: $\frac{7}{21} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\%$.

f) A csoportátlagot a jegyeknek a gyakoriságaikkal súlyozott számtani közepe adja:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{4 + 3 + 5 + 4 + 3} = \frac{64}{21} \approx 3{,}05.$$

g) A jegyek módusza a legnagyobb gyakoriságú osztályzat. A gyakorisági táblázat alapján a 6 az előforduló legnagyobb gyakoriság, ami a 4-es osztályzaté. Tehát a módusz 4.

Az osztálylétszám 21, ami páratlan, tehát van középső elem a tanulók jegyeinek nagyságrendi sorrendjében. Ez a 11. elem. A jegyek növekvő sorrendjében a gyakoriságaikat összeadva, a hármas jegynél éri el az összeg a 11-et, ezért a medián 3.

h) A jegyek átlagos abszolút eltérése az $\overline{x} \approx 3{,}05$ értéket felhasználva:

$$S_{21}(\overline{x}) \approx \frac{4 \cdot |1 - 3{,}05| + 3 \cdot |2 - 3{,}05| + 5 \cdot |3 - 3{,}05| + 6 \cdot |4 - 3{,}05| + 3 \cdot |5 - 3{,}05|}{21} =$$

$$= \frac{4 \cdot 2{,}05 + 3 \cdot 1{,}05 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}95 + 3 \cdot 1{,}95}{21} = \frac{463}{420} \approx 1{,}1024.$$

A jegyek átlagos minimális eltérése a mediánhoz viszonyított átlagos abszolút eltérés.

A medián 3, így:

$$S_{21}(3) = \frac{4 \cdot |1 - 3| + 3 \cdot |2 - 3| + 5 \cdot |3 - 3| + 6 \cdot |4 - 3| + 3 \cdot |5 - 3|}{21} =$$

$$= \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{21} = \frac{23}{21} \approx 1{,}0952.$$

i) A jegyek szórása:

$$D_{21} \approx \sqrt{\frac{4 \cdot (1 - 3{,}05)^2 + 3 \cdot (2 - 3{,}05)^2 + 5 \cdot (3 - 3{,}05)^2 + 6 \cdot (4 - 3{,}05)^2 + 3 \cdot (5 - 3{,}05)^2}{21}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 2{,}05^2 + 3 \cdot 1{,}05^2 + 5 \cdot 0{,}05^2 + 6 \cdot 0{,}95^2 + 3 \cdot 1{,}95^2}{21}} = \sqrt{\frac{14781}{8400}} \approx 1{,}3265.$$

2. Az alábbi táblázat négy egymást követő tanév betöltetlen tanári álláshelyeinek számát tartalmazza iskolatípusonként.

	1996/97	1997/98	1998/99	1999/2000
gimnázium	122	87	70	95
szakközépiskola	330	416	422	515
szakiskola	108	96	145	136

a) Ábrázolja oszlopdiagramon évenkénti csoportosításban az egyes iskolatípusok adatait!

b) Ábrázolja vonaldiagramon a három iskolatípus adatait a tanévek függvényében!

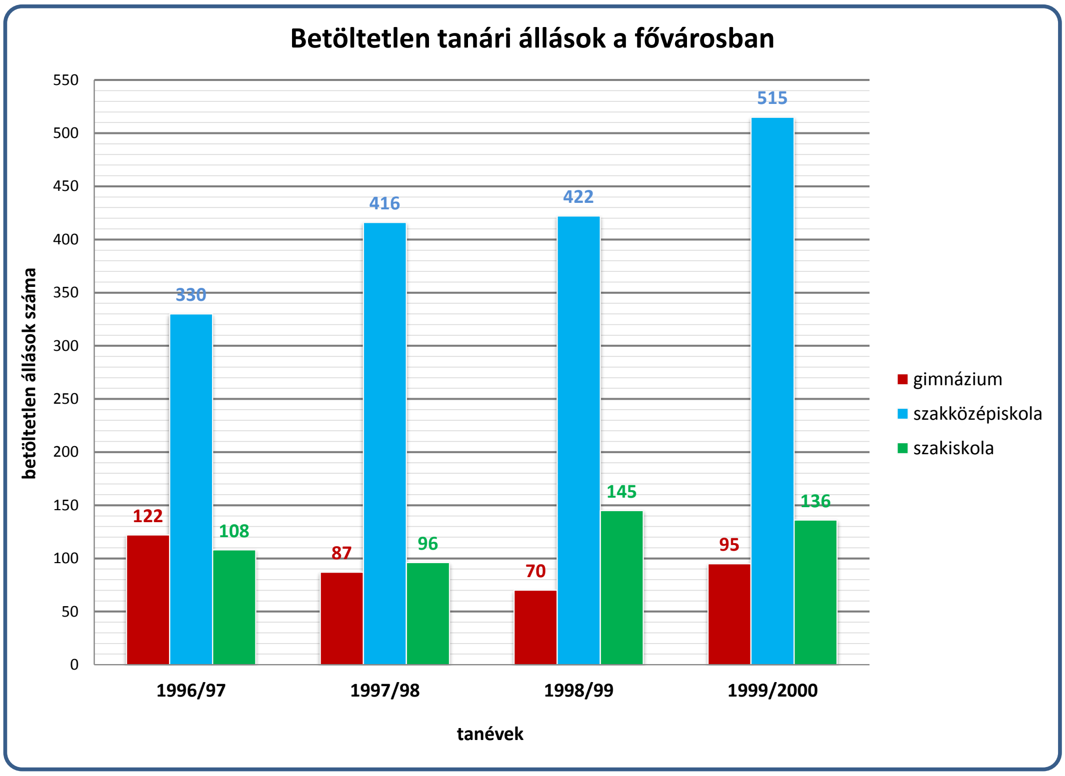
Megoldás:

a) Az oszlopdiagram megtervezése:

- A vízszintes tengelyen a tanévek szerepelnek. Minden tanévhez három oszlop fog tartozni, melyek szélessége szabadon megválasztható. Legyenek az oszlopok például 0,5 cm szélesek.
- A függőleges tengelyen a betöltetlen állások száma szerepel. A lépték megállapításához vizsgáljuk meg az adatok minimumát és maximumát. A legkisebb adat 70, a legnagyobb 515, ezért válasszuk a skála maximumának például az 550-et. Feleljen meg 10 egységnek 2 mm hosszú szakasz. Így a diagramterület magassága 110 mm lesz.
- Az oszlopok magasságainak meghatározása: A fentebb megválasztott egység felhasználásával az x értékhez tartozó oszlopmagasság $x \cdot \frac{2}{10}$ mm. Az oszlopmagasságokat milliméterre kerekítve az alábbi táblázat tartalmazza:

	1996/97	1997/98	1998/99	1999/2000
gimnázium	24 mm	17 mm	14 mm	19 mm
szakközépiskola	66 mm	83 mm	84 mm	103 mm
szakiskola	22 mm	19 mm	29 mm	27 mm

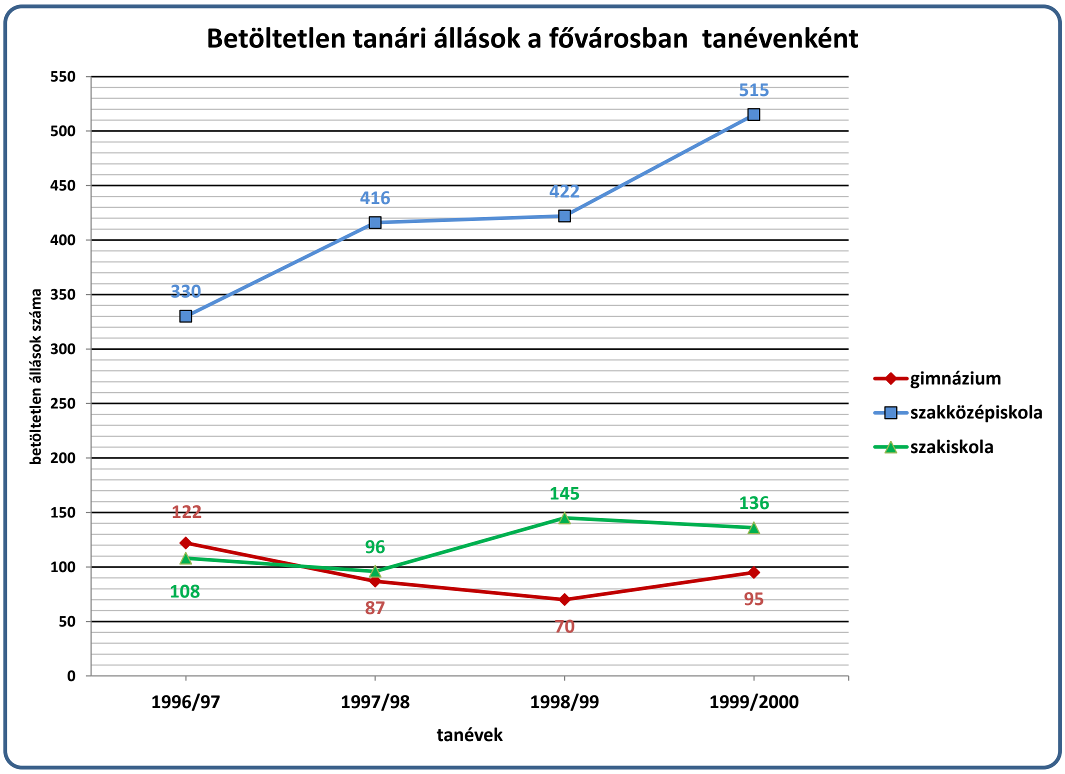
A fenti leírás alapján elkészített diagram az alábbihoz hasonló lesz.



b) A vonaldiagram megtervezése:

- A vízszintes tengelyen 4 tanév szerepel.
- A függőleges tengelyen a betöltetlen állások számát ábrázoljuk. Léptékként az a) pontbeli értékeket használjuk, így a diagramterület magassága 110 mm lesz.
- Az adatok ábrázolásához is az a) pontbeli táblázat mm-ben megadott értékeit használjuk.

A fenti leírás alapján elkészített diagram az alábbihoz hasonló lesz.



3. Az alábbi táblázat egy háztartás havi kiadásait tartalmazza fontosabb csoportokra bontva.

Kiadási csoport	Százalékos arány	A kördiagramon hozzátartozó középponti szög
Élelmiszer	20%	
Élvezeti cikkek	8%	
Ruházkodás	6%	
Fűtés	11%	
Tartós fogyasztási cikkek	5%	
Szolgáltatás		
Egyéb		54°

a) Töltse ki a táblázat üres celláit a hiányzó adatokkal!

b) Ábrázolja kördiagramon a kiadási csoportok százalékos eloszlását a táblázat alapján!

c) Négy évvel később az infláció és az áremelkedések miatt a fűtésre fordított összeg aránya megkétszereződött, a szolgáltatások ára pedig 20%-kal megemelkedett. A többi csoport kiadásainak egymáshoz viszonyított aránya nem változott. Adja meg a kiadási csoportok új százalékos eloszlását, ha a család havi összes kiadása kétszeresére nőtt a négy év alatt!

Megoldás:

a) A táblázat hiányzó adatainak megadása:

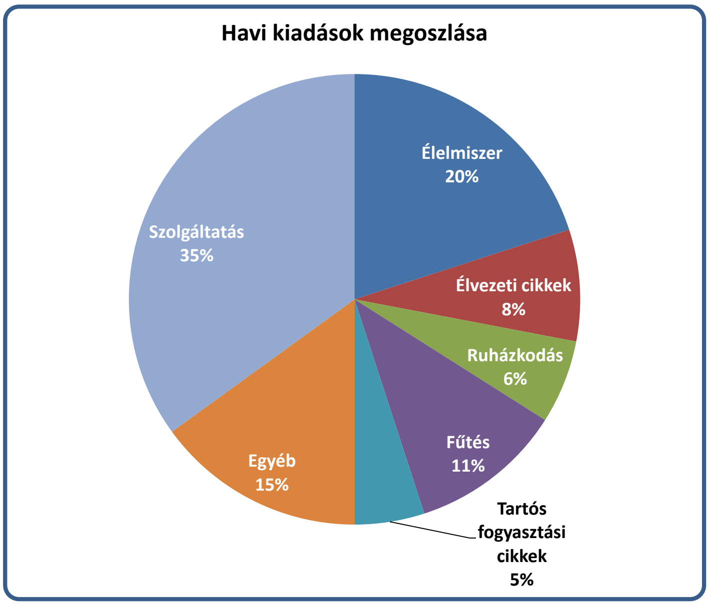
- Először a százalékos arányok oszlopát egészítjük ki.
  - Az „Egyéb” csoport százalékos aránya az 54°-nak a 360°-hoz viszonyított százalékos arányával egyenlő: $\frac{54}{360} = 15\%$.

- A „Szolgáltatás” csoport százalékos aránya a többi csoport százalékos arányának összegét egészíti ki 100%-ra: $100\% - (20\% + 8\% + 6\% + 11\% + 5\% + 15\%) = 35\%$.

- A középponti szögeket megkapjuk, ha a 360°-nak a megfelelő százalékait vesszük.

Kiadási csoport	Százalékos arány	A kördiagramon hozzátartozó középponti szög
Élelmiszer	20%	$0{,}2 \cdot 360° = 72°$
Élvezeti cikkek	8%	28,8°
Ruházkodás	6%	21,6°
Fűtés	11%	39,6°
Tartós fogyasztási cikkek	5%	18°
Szolgáltatás	35%	126°
Egyéb	15%	54°

b) A kördiagram a táblázat alapján:



c) A kiadási csoportok új százalékos eloszlása:

Jelöljük x-szel az egyhavi kiadás régi értékét! Az új egy havi kiadás $2x$. Ez lesz az új százalékos arányok számításánál a százalékalap.

- A fűtés költségének aránya megkétszereződött, tehát 22% lett.
- A szolgáltatás költsége 20%-kal nőtt, tehát $1{,}2 \cdot 0{,}35 \cdot x$ lett. Az új százalékos aránya
$$\frac{1{,}2 \cdot 0{,}35x}{2x} = 21\%.$$
- A fűtés és a szolgáltatás együtt az új költség $22\% + 21\% = 43\%$-át teszi ki. A többi csoportra így 57% jut, és kiadásaiknak egymáshoz viszonyított aránya nem változott, $20:8:6:5:15$ maradt. $20 + 8 + 6 + 5 + 15 = 54$, tehát az 57%-nak a
$$\frac{20}{54}, \quad \frac{8}{54}, \quad \frac{6}{54}, \quad \frac{5}{54}, \quad \frac{15}{54}$$
része jut az egyes csoportokra, amelyek egy tizedesre kerekített értékeit az alábbi táblázat tartalmazza.

Kiadási csoport	régi arány	új arány
Élelmiszer	20%	$\frac{20}{54} \cdot 57\% \approx 21{,}1\%$
Élvezeti cikkek	8%	$\frac{8}{54} \cdot 57\% \approx 8{,}4\%$
Ruházkodás	6%	$\frac{6}{54} \cdot 57\% \approx 6{,}3\%$
Fűtés	11%	22%
Tartós fogyasztási cikkek	5%	$\frac{5}{54} \cdot 57\% \approx 5{,}3\%$
Szolgáltatás	35%	21%
Egyéb	15%	$\frac{15}{54} \cdot 57\% \approx 15{,}8\%$

4. Egy vállalat egyik részlegében dolgozók ezer forintban megadott havi bruttó béreinek gyakoriságai az alábbi táblázatban láthatók.

bér	80	95	125	180	250
gyakoriság	8	5	3	2	2

a) Mennyivel változna az átlagos havi bruttó bér, és hogyan változnának a szóródási mutatók (terjedelem, átlagos abszolút eltérés és a szórás), ha minden dolgozó bérét 20 ezer forinttal megnövelnék?

b) Mennyivel változna az átlagos havi bruttó bér, és hogyan változnának a szóródási mutatók (terjedelem, átlagos abszolút eltérés és a szórás), ha minden dolgozó bérét 10%-kal megnövelnék?

c) A vállalat egy másik részlegében 30 fő dolgozik, bruttó átlagbérük $\overline{y} = 140$ ezer Ft. Mennyi a két részleg együttesére vonatkozó $\overline{z}$ átlagkereset?

Megoldás:

a) Ha minden dolgozó bérét 20 ezer forinttal megemelnék, akkor az új átlagkereset

$$\frac{(x_1+20)+(x_2+20)+\cdots+(x_n+20)}{n} = \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+20n}{n} = \overline{x}+20.$$

Tehát az átlagkereset is 20 ezer forinttal nőne.

A szóródási mutatók:

- Terjedelem: $(x_{max}+20)-(x_{min}+20) = x_{max}-x_{min}$, tehát nem változik.
- Átlagos abszolút eltérés:
  - Az i-edik dolgozó megemelt bére: x_i+20;
  - A megemelkedett átlagfizetés: $\overline{x}+20$;
  - Az i-edik dolgozó megemelt bérének a megemelkedett átlagtól való abszolút eltérése: $|(x_i+20)-(\overline{x}+20)| = |x_i-\overline{x}|$, vagyis változatlan maradt.

Ezt felhasználva, az átlagos abszolút eltérés változatlansága is adódik:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|(x_i+20)-(\overline{x}+20)| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|.$$

- Szórás:

  A szórásnégyzetben szereplő összeg általános tagja nem változik

  $$[(x_i+20)-(\overline{x}+20)]^2 = (x_i-\overline{x})^2,$$

  ezért a szórás sem:

  $$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i+20)-(\overline{x}+20)]^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}.$$

b) Ha minden dolgozó bérét 10%-kal megemelnék, akkor az átlagkereset is 10%-kal nőne, mert

$$\frac{1{,}1x_1+1{,}1x_2+\cdots+1{,}1x_n}{n} = \frac{1{,}1(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n} = 1{,}1\cdot\overline{x},$$

ahol

$$\overline{x} = \frac{8\cdot 80+5\cdot 95+3\cdot 125+2\cdot 180+2\cdot 250}{8+5+3+2+2} = \frac{2350}{20} = 117{,}5.$$

Így a 10%-os emelés után az átlagfizetés 11750 Ft-tal nőne.

A szóródási paraméterek:

- Terjedelem: $1{,}1x_{max}-1{,}1x_{min} = 1{,}1(x_{max}-x_{min})$, tehát 10%-kal nőne.
- Átlagos abszolút eltérés:
  - Az i-edik dolgozó megemelt bére: $1{,}1x_i$;
  - A megemelkedett átlagfizetés: $1{,}1\overline{x}$;
  - Az i-edik dolgozó megemelt bérének a megemelkedett átlagtól való abszolút eltérése:

    $$|1{,}1x_i-1{,}1\overline{x}| = |1{,}1(x_i-\overline{x})| = |1{,}1|\cdot|x_i-\overline{x}| = 1{,}1|x_i-\overline{x}|.$$

  Mivel mindegyik dolgozó esetén fellép az 1,1-szeres szorzó, ezért kiemelhető az alábbi átlagos abszolút eltérésben szereplő összegből, így

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|1{,}1x_i-1{,}1\overline{x}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1{,}1|x_i-\overline{x}| = 1{,}1\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|.$$

  Tehát az átlagos abszolút eltérés is 10%-kal nőne.

- Szórás:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1{,}1x_i-1{,}1\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1{,}1^2(x_i-\overline{x})^2} = \sqrt{1{,}1^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} = 1{,}1\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}.$$

  Tehát a szórás is 10%-kal nőne.

c) A két részlegben dolgozók átlagfizetése (ezer Ft-ban):

$$\overline{z} = \frac{20\overline{x}+30\overline{y}}{50} = \frac{20\cdot 117{,}5+30\cdot 140}{50} = \frac{6550}{50} = 131.$$

Az együttes átlagfizetés 131000 Ft.

6. Az alábbi táblázat egy tőzsde indexének napi alakulását mutatja óránkénti lebontásban négy napra vonatkozólag. A tőzsde délelőtt 9 órakor nyitott, és délután 4 órakor zárt.

dátum	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
11.08.	8250	8400	8900	8900	8958	8922	8878	8750
11.09.	8750	8600	8650	8650	8750	8602	8504	8498
11.10.	8498	8300	8115	7800	7850	7854	7866	7797
11.11.	7797	7600	7420	6900	6788	7210	7405	7995

a) Készítsen új táblázatot, amelyben megadja minden napra vonatkozólag az index maximumát, minimumát, a napi záróértéket és az index napi ingadozásának nagyságát!
b) Mennyi volt a négy nap során az árindex legnagyobb és legkisebb értéke?
c) Melyik napokon volt a legnagyobb és a legkisebb az árindex napi ingadozása? Adja meg ezeket az ingadozásokat!
d) Az első napi nyitástól számítva az utolsó nap zárásáig mennyivel változott meg az index, és hány százalékos volt ez a változás?

Megoldás:

a) A magadott táblázatból soronként ki kell keresni a legnagyobb és a legkisebb értékeket. A terjedelem ezek különbségeként adódik. A záróérték pedig a 16:00-hoz tartozó oszlopból olvasható ki.

dátum	max.	min.	záró	ingadozás
11.08.	**8958**	8250	8750	708
11.09.	8750	8498	8498	**252**
11.10.	8498	7797	7797	701
11.11.	7995	**6788**	**7995**	**1207**

b) A kapott táblázat napi maximális értékeit tartalmazó oszlopából a legnagyobb érték a 8958, ami a négy napra vonatkozó maximális érték is egyben.
A legkisebb értéket a minimális értékeket tartalmazó oszlop legkisebb értéke adja, ami a 6788.

c) A napi árindex ingadozása az utolsó napon (november 11.) volt a legnagyobb, amit az a) pontbeli táblázat „ingadozás” oszlopából olvashatunk ki, és ez 1207. A legkisebb ingadozást hasonlóan adhatjuk meg: a második napon (november 9.) volt, és nagysága 252.

d) Az első napi nyitóindex a 11.08. 9:00 időponthoz tartozó index az eredeti táblázat alapján 8250. Az utolsó napi zклóindex pedig 7995, ami a 11.11. 16:00 időponthoz tartozik. A megváltozás $7995 - 8250 = -255$.

A változás százalékosan: $\frac{-255}{8250} \approx -3{,}1\%$.

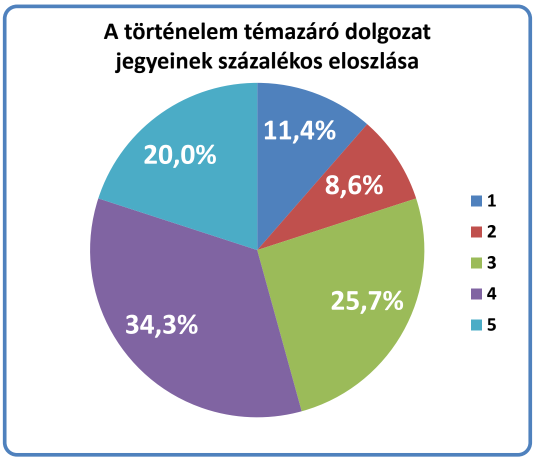
III. Ajánlott feladatok

1. Egy 80 lakásos társasházban a lakások alapterület szerinti eloszlása az alábbi táblázatban látható.

alapterület (m^2)	35	50	62	70	85	100
lakásszám	10	22	14	11	8	15

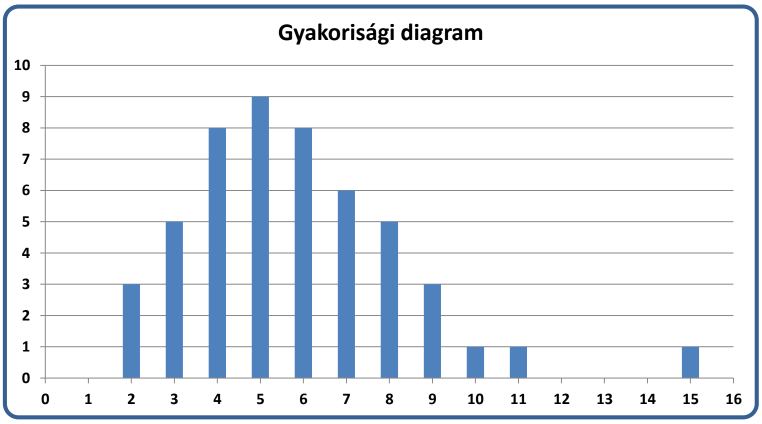
a) Számolja ki a különböző alapterületű lakások relatív gyakoriságát!
b) Ábrázolja kördiagramon az alapterület szerinti százalékos eloszlást!
c) Adja meg a lakások alapterületeinek móduszát, mediánját és számtani közepét!

2. Egy 35 fős osztály történelem témazáró dolgozatának eredményei alapján az alábbi kördiagram készült.



a) Készítse el a jegyek gyakorisági táblázatát!
b) Ábrázolja oszlopdiagramon a jegyek gyakoriságait!
c) Adja meg a jegyek átlagos abszolút eltérését és átlagos minimális eltérését!

3. Egy minta gyakorisági diagramja látható az alábbi ábrán.



a) Adja meg a minta móduszát és mediánját!
b) Számítsa ki a minta számtani közepét, szórását!
c) Adja meg a móduszt és a mediánt, ha kihagyjuk a 15-ös értéket!
d) Hogyan változik a számtani közép és a szórás a 15 kihagyásával? Indokolja meg ezek alapján, hogy miért tekintendő kiugró adatnak a 15!

4. Az alábbi táblázat egy ország bortermelési adatait tartalmazza.

év	bortermelés (1000 hl)	év	bortermelés (1000 hl)
1980	7300	1986	8500
1981	15900	1987	9400
1982	14200	1988	13500
1983	8000	1989	8600
1984	5500	1990	10500
1985	10000	1991	14000

a) Ábrázolja vonaldiagramon az évenkénti bortermelést!
b) Az a) pontbelivel megegyező beosztású koordináta-rendszerben ábrázolja vonaldiagramon csak az 1980, 1983, 1986, 1990 és 1991 évek adatait!
c) Az a) pontbelivel megegyező beosztású koordináta-rendszerben ábrázolja vonaldiagramon csak az 1981, 1982, 1985, 1987 és 1989 évek adatait!
d) Milyen következtetéseket vonhat le valaki az ország bortermelésével kapcsolatban, ha a fenti diagramok közül csak egyet mutatnak meg neki? Írja le a válaszokat mindhárom esetre vonatkozólag!

5. Egy autóút mellett egy órán át forgalomszámlálást végeztek. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

személyautó	teherautó	autóbusz	motorkerékpár
725	380	96	28

Három év múlva ugyanitt megismételték az egy órás forgalomszámlálást, és a következőket tapasztalták.

személyautó	teherautó	autóbusz	motorkerékpár
1280	450	52	73

a) Ábrázolja oszlopdiagramon - járműfajtánként csoportosítva az oszlopokat - a két mérés adatait!
b) Melyik járműfajta esetében volt a legnagyobb a változás, illetve a változás százalékos mértéke?

6. Az alábbi táblázat a lakosság korösszetételét tartalmazza a megadott években.

év	korösszetétel (%)		
	gyerekek	keresők	idősek
	-14	15-64	65-
1996	18	67,8	14,2
1997	17,7	68	14,3
1998	17,5	68,1	14,4
1999	17,3	68,2	14,5
2000	17,1	68,3	14,6

A gyerekek és az idősek a keresők által eltartottnak számítanak. Egy eltartott csoport eltartottsági rátáján az $\frac{eltartottak\ száma}{eltartók\ száma}$ hányadost értjük.

a) Határozza meg az idős népesség, a gyerekek és az összes eltartott eltartottsági rátáját a 15-64 éves korosztályra vonatkozólag a táblázatban szereplő években!

b) Az $\frac{idősek\ száma}{gyerekek\ száma}$ hányadost öregedési indexnek nevezzük. Határozza meg az öregedési index százalékos értékét a fenti évekre vonatkozólag, majd ábrázolja azokat vonaldiagramon!

7. Az alábbi táblázatban a mozi-, színház- és múzeumlátogatók száma látható 1987-re és 1999-re vonatkozólag 1000 főben megadva.

év	mozi	színház	múzeum
1987	558,33	58,68	200,66
1999	140,71	40,13	97,14

a) Ábrázolja egy-egy kördiagramon a két év adatait! Tüntesse fel a diagramokon a százalékos gyakoriságokat!

b) Évente átlagosan hány százalékkal változott a látogatók száma a mozi, a színház és a múzeum esetében?

8. Az alábbi táblázat egy tőzsde indexének napi alakulását mutatja óránkénti lebontásban négy napra vonatkozólag. A tőzsde délelőtt 9 órakor nyitott és délután 4 órakor zárt.

	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
március 23.	8498	8300	8115	7800	7625	7854	7866	7997
március 24.	7797	7600	7420	6900	6788	7210	7405	7125
március 25.	7125	8200	8150	8159	8111	8321	8245	7652
március 26.	7652	8554	8540	8654	8541	8415	8305	8299

a) Adja meg a táblázatban szereplő napokra vonatkozólag az indexek maximális, minimális és záróértékeit, valamint a négy nap adatai által alkotott minta terjedelmét a táblázat adatai alapján!

b) Adja meg, hogy hány százalékkal változott a záróindex az előző napi záróértékhez képest 24-én, 25-én és 26-án!

c) Ábrázolja oszlopdiagramon az előbbi százalékos változásokat a három napra vonatkozólag! Az abszcissza-tengely minden nap az előző napi záróindexnek megfelelő 100%-ot képviseli.

9. A fogyasztói árindex alakulását mutatja két országban az alábbi táblázat.

év	Magyarország (%)	Nagy-Britannia (%)
1992	100	100
1993	122,5	101,6
1994	118,8	102,5
1995	128,2	103,4
1996	123,6	102,5
1997	118,3	103,1

Az árindex azt mutatja meg, hogy az előző évinek hány százaléka az aktuális évi árszínvonal.

a) Készítsen táblázatot, amelyben megadja mindkét ország árszínvonalait 1997-ig évente az 1992. évihez viszonyítva!

b) Ábrázolja vonaldiagramon a kapott árszínvonalakat az évek függvényében!

c) Hányszorosa a magyarországi átlagos évi árszínvonal-növekedés a britnek az 1992-1997-ig tartó időszakban?

10. Egy évfolyamon három tanulócsoport oldotta meg ugyanazt a matematika feladatsort. Az egyes csoportok teljesítménye 68%, 48% és 72% volt. Ugyanebben a sorrendben a csoportlétszámok 23, 30 és 15. Adja meg az összes tanuló átlagos teljesítményét százalékban!

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Egy 80 lakásos társasházban a lakások alapterület szerinti eloszlása az alábbi táblázatban látható.

alapterület (m^2)	35	50	62	70	85	100
lakásszám	10	22	14	11	8	15

a) Számolja ki a különböző alapterületű lakások relatív gyakoriságát!
b) Ábrázolja kördiagramon az alapterület szerinti százalékos eloszlást!
c) Adja meg a lakások alapterületeinek móduszát, mediánját és számtani közepét!

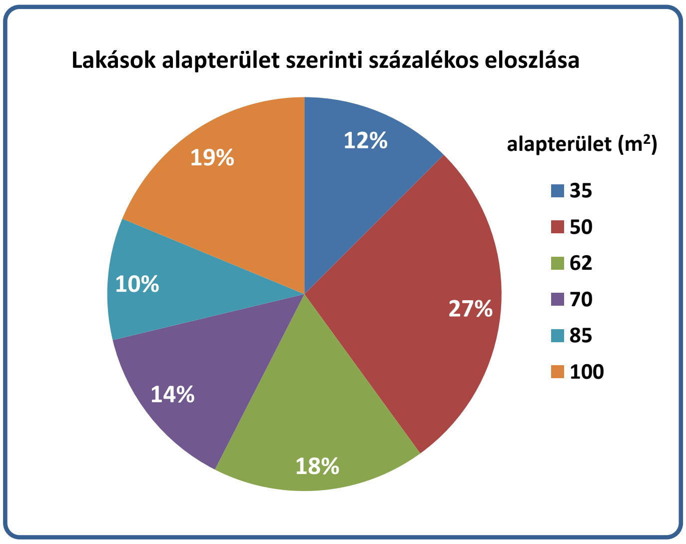
Megoldás:

a) A relatív gyakorisági táblázat:

alapterület (m^2)	35	50	62	70	85	100
lakásszám	10	22	14	11	8	15
relatív gyakoriság	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{16}$

b) A lakások alapterület szerinti százalékos eloszlása kördiagramon:
Az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek (a relatív gyakoriság szorozva 360°-kal):

alapterület (m^2)	35	50	62	70	85	100
középponti szög	45°	99°	63°	49,5°	36°	67,5°

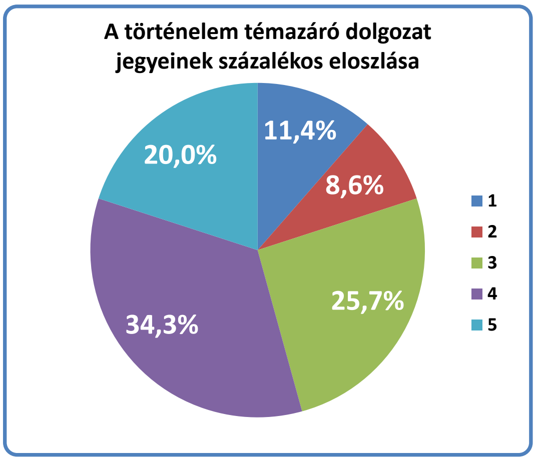


c) A módusz 50 m^2, mert gyakorisága a legnagyobb: 22.

A medián 62 m^2, mert a nagyságrendi sorrend 40. és 41. elemeinek (mindkettő 62 m^2) számtani közepe.

$\overline{x} = 65{,}85$ m^2, ami a lakás-alapterületeknek a megfelelő lakásszámokkal (gyakoriságaikkal) súlyozott számtani közepeként adódott.

2. Egy 35 fős osztály történelem témazáró dolgozatának eredményei alapján az alábbi kördiagram készült.



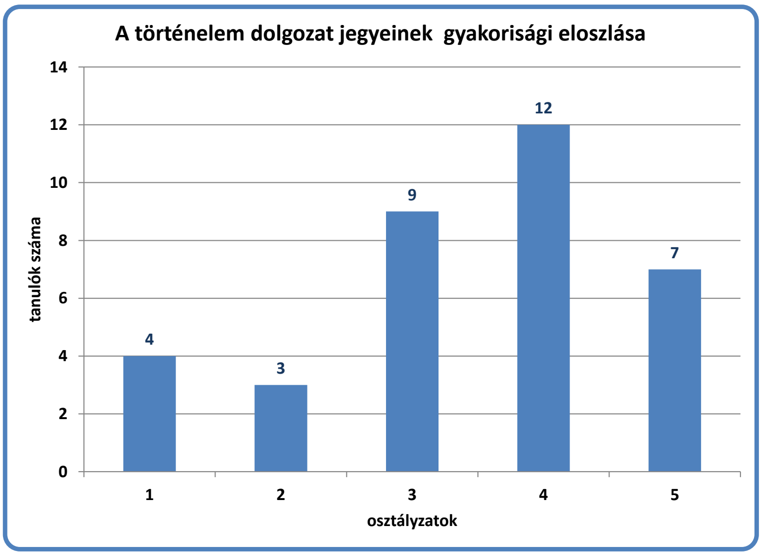
a) Készítse el a jegyek gyakorisági táblázatát!
b) Ábrázolja oszlopdiagramon a jegyek gyakoriságait!
c) Adja meg a jegyek átlagos abszolút eltérését és átlagos minimális eltérését!

Megoldás:

a) A százalékos gyakoriságok a diagramról leolvashatók. A gyakoriságokat a 35-ös osztálylétszám megfelelő százalékai adják.

jegy	1	2	3	4	5
gyakoriság	4	3	9	12	7

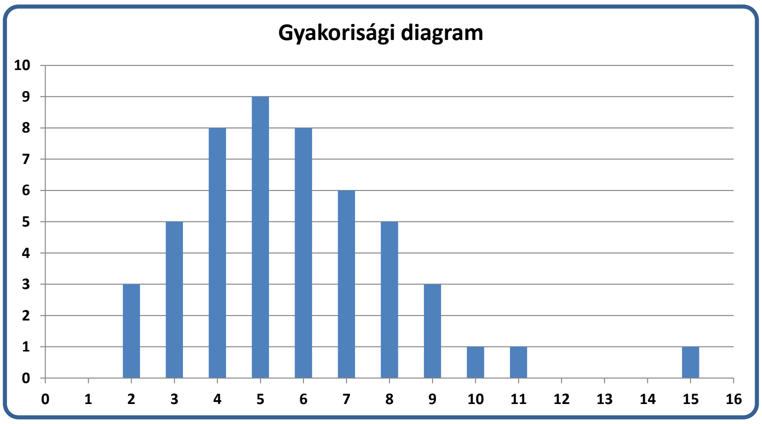
b) A jegyek gyakoriságai oszlopdiagramon:



c) A jegyek számtani közepe két tizedesjegyre kerekítve: $\overline{x} \approx 3{,}43$. Ezt a kerekített értéket felhasználva az átlagos abszolút eltérés: $S_{35}(\overline{x}) \approx 1{,}02$.

A jegyek mediánja 4, mert a 35 elem esetén a 17. elem a középső. A gyakoriságokat összeadva a jegyek növekvő sorrendjében, az összeg a 17-et a 4-es osztályzatnál éri el. Ezt felhasználva az átlagos minimális eltérés: $S_{35}(4) \approx 0{,}97$.

3. Egy minta gyakorisági diagramja látható az alábbi ábrán.



a) Adja meg a minta móduszát és mediánját!
b) Számítsa ki a minta számtani közepét, szórását!
c) Adja meg a móduszt és a mediánt, ha kihagyjuk a 15-ös értéket!
d) Hogyan változik a számtani közép és a szórás a 15 kihagyásával? Indokolja meg ezek alapján, hogy miért tekintendő kiugró adatnak a 15!

Megoldás:

a) A módusz 5, mert a diagram alapján az 5 gyakorisága 9, és az a legnagyobb.

A medián a gyakorisági táblázat alapján megadható.

adat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
gyakoriság	0	3	5	8	9	8	6	5	3	1	1	0	0	0	1

A gyakoriságok összege 50, ami a minta elemszáma. Az 50 páros, tehát a medián a 25. és 26. elem számtani közepe. A nagyságrendi sorrendben a 25. elem 5, a 26. pedig 6. Így a medián: 5,5.

b) A minta számtani közepe: $\overline{x}_{50} = 5{,}82$; szórása: $D_{50} \approx 2{,}479$.

c) A 15 kihagyásával a módusz: 5.
A minta elemszáma 49 lett, így van középső elem, ami a 25. elem, ezért a medián 5.

d) A minta számtani közepe: $\overline{x}_{49} \approx 5{,}63$; szórása: $D_{49} \approx 2{,}126$.
A megváltozások a kapott kerekített értékekkel számolva:

$\overline{x}_{49} - \overline{x}_{50} = 5{,}63 - 5{,}82 = -0{,}19$, ami 3,3% csökkenés.

$D_{49} - D_{50} = 2{,}126 - 2{,}479 = -0{,}353$, ami 14,2% csökkenés.

$r_{sz2} - r_{sz1} = 0{,}377 - 0{,}426 = -0{,}049$, ami 11,5% csökkenés.

Egy adat kihagyása az 50-ből (2%-os adatszám csökkenés) a szórást 14,2%-kal csökkentette, ami azt mutatja, hogy a kihagyott elem az átlagot kiugróan nagy mértékben meghaladta.

4. Az alábbi táblázat egy ország bortermelési adatait tartalmazza.

év	bortermelés (1000 hl)	év	bortermelés (1000 hl)
1980	7300	1986	8500
1981	15900	1987	9400
1982	14200	1988	13500
1983	8000	1989	8600
1984	5500	1990	10500
1985	10000	1991	14000

a) Ábrázolja vonaldiagramon az évenkénti bortermelést!

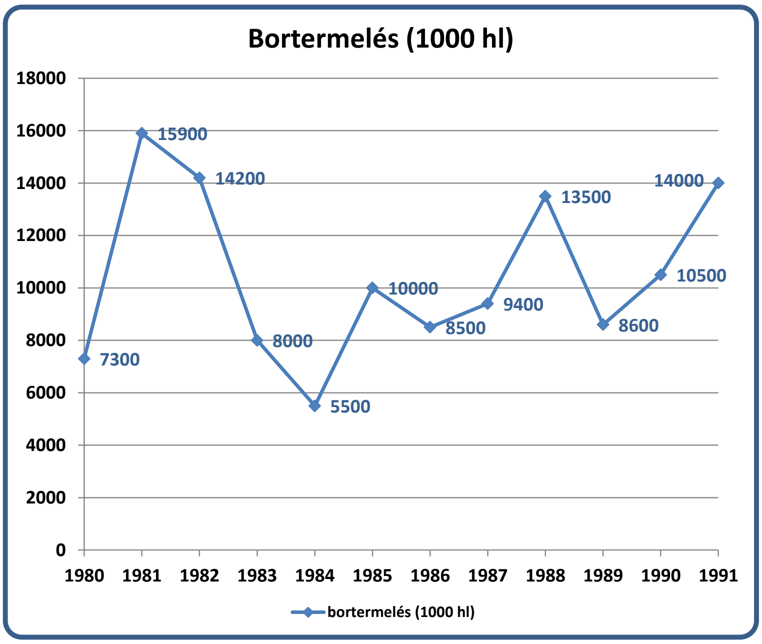
b) Az a) pontbelivel megegyező beosztású koordináta-rendszerben ábrázolja vonaldiagramon csak az 1980, 1983, 1986, 1990 és 1991 évek adatait!

c) Az a) pontbelivel megegyező beosztású koordináta-rendszerben ábrázolja vonaldiagramon csak az 1981, 1982, 1985, 1987 és 1989 évek adatait!

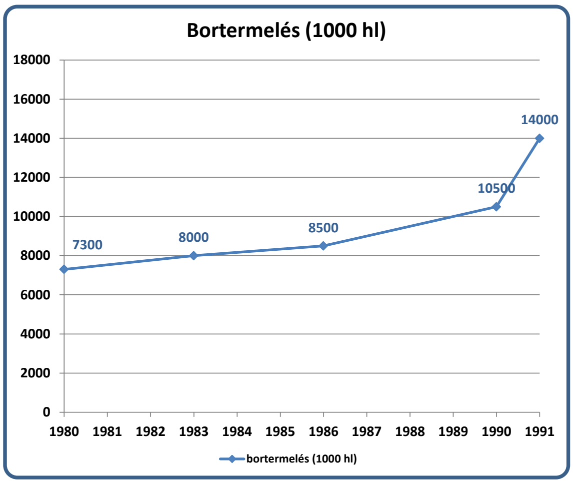
d) Milyen következtetéseket vonhat le valaki az ország bortermelésével kapcsolatban, ha a fenti diagramok közül csak egyet mutatnak meg neki? Írja le a válaszokat mindhárom esetre vonatkozólag!

Megoldás:

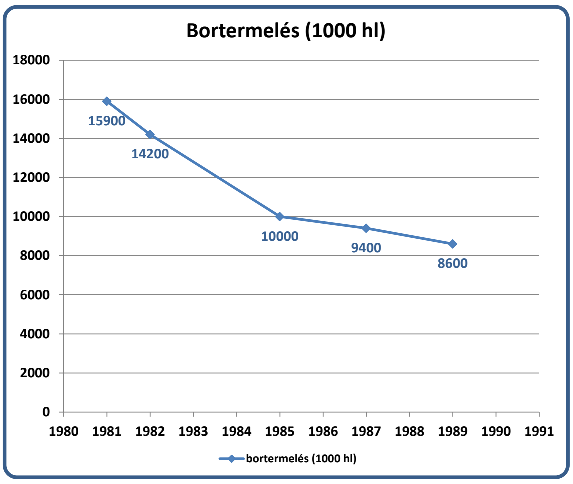
a) A bortermelés alakulása 1980-1991-ig:



b) A bortermelés alakulása 1980-1991-ig:



c) A bortermelés alakulása 1981-1989-ig:



d) Az a) esetben a bortermelés nagy ingadozást mutat. A vizsgált időszakban 15900 és 5500 (ezer hl) között ingadozott. Bár az első évihez viszonyítva az utolsó évi termelés majdnem megkétszereződött, a növekedési tendencia nem jellemezte egyformán az egymást követő évek termelését. Három emelkedési és két csökkenési szakasz volt, tehát nem egyenletesen változott a termelés.

A b) esetben majdnem kétszeresére nőtt az adott időszakban a termelés, és a diagram azt sugallja, hogy minden évben növekedés volt.

A c) eset rossz képet fest a bortermelésről, mert a termelési adatok folyamatos romlást mutatnak, a termelés majdnem a felére esett.

5. Egy autóút mellett egy órán át forgalomszámlálást végeztek. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

személyautó	teherautó	autóbusz	motorkerékpár
725	380	96	28

Három év múlva ugyanitt megismételték az egy órás forgalomszámlálást, és a következőket tapasztalták.

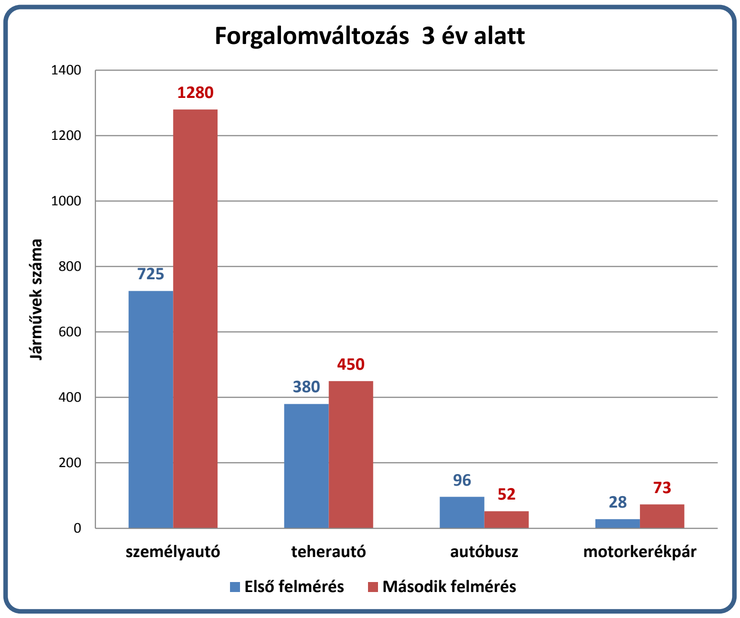
személyautó	teherautó	autóbusz	motorkerékpár
1280	450	52	73

a) Ábrázolja oszlopdiagramon - járműfajtánként csoportosítva az oszlopokat - a két mérés adatait!

b) Melyik járműfajta esetében volt a legnagyobb a változás, illetve a változás százalékos mértéke?

Megoldás:

a) A felmérések eredményei oszlopdiagramon:



b) A változások, illetve a százalékos változások mértéke:

	személyautó	teherautó	autóbusz	motorkerékpár
I. mérés	725	380	96	28
II. mérés	**1280**	450	52	73
változás	555	70	-44	45
változás százalékban	76,6%	18,4%	-45,8%	**160,7%**

A változás mértéke a személyautóknál volt a legnagyobb, 1280-as növekedés. A változás százalékos mértéke a motorkerékpároknál volt a legnagyobb, 160,7%-os növekedés.

6. Az alábbi táblázat a lakosság korösszetételét tartalmazza a megadott években.

év	korösszetétel (%)		
	gyere-kek	keresők	idősek
	-14	15-64	65-
1996	18	67,8	14,2
1997	17,7	68	14,3
1998	17,5	68,1	14,4
1999	17,3	68,2	14,5
2000	17,1	68,3	14,6

A gyerekek és az idősek a keresők által eltartottnak számítanak. Egy eltartott csoport eltartottsági rátáján az $\frac{eltartottak\ száma}{eltartók\ száma}$ hányadost értjük.

a) Határozza meg az idős népesség, a gyerekek és az összes eltartott eltartottsági rátáját a 15-64 éves korosztályra vonatkozólag a táblázatban szereplő években!

b) Az $\frac{idősek\ száma}{gyerekek\ száma}$ hányadost öregedési indexnek nevezzük. Határozza meg az öregedési index százalékos értékét a fenti évekre vonatkozólag, majd ábrázolja azokat vonaldiagramon!

Megoldás:

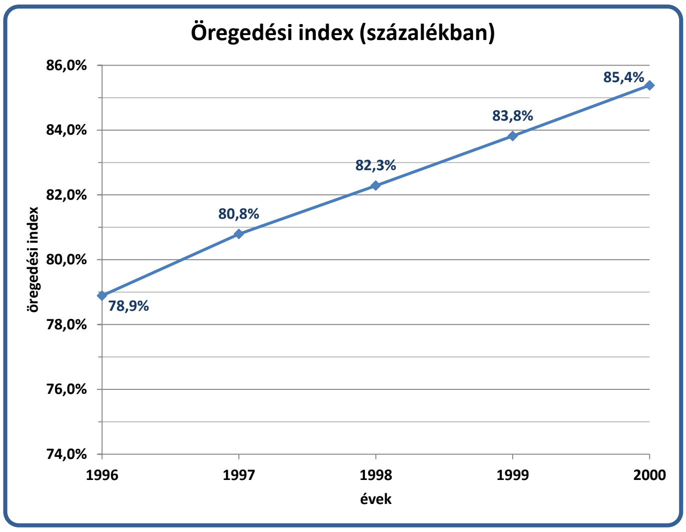
a) Az eltartottsági ráták meghatározása:

Gyerekek: $\frac{\text{gyerekek száma}}{\text{eltartók száma}}$. Idősek: $\frac{\text{idősek száma}}{\text{eltartók száma}}$. Összes eltartott: $\frac{\text{gyerekek száma+idősek száma}}{\text{eltartók száma}}$.

	korcsoportok (év)			idősek eltartottsági rátája	gyerekek eltartottsági rátája	összes eltartott eltartottsági rátája
	-14	15-64	65-			
1996	18	67,8	14,2	20,9%	26,5%	47,5%
1997	17,7	68	14,3	21,0%	26,0%	47,1%
1998	17,5	68,1	14,4	21,1%	25,7%	46,8%
1999	17,3	68,2	14,5	21,3%	25,4%	46,6%
2000	17,1	68,3	14,6	21,4%	25,0%	46,4%

b) Az öregedési index meghatározása: $\frac{\text{idősek száma}}{\text{gyerekek száma}}$.

évek	öregedési index
1996	78,9%
1997	80,8%
1998	82,3%
1999	83,8%
2000	85,4%



7. Az alábbi táblázatban a mozi-, színház- és múzeumlátogatók száma látható 1987-re és 1999-re vonatkozólag 1000 főben megadva.

év	mozi	színház	múzeum
1987	558,33	58,68	200,66
1999	140,71	40,13	97,14

a) Ábrázolja egy-egy kördiagramon a két év adatait! Tüntesse fel a diagramokon a százalékos gyakoriságokat!

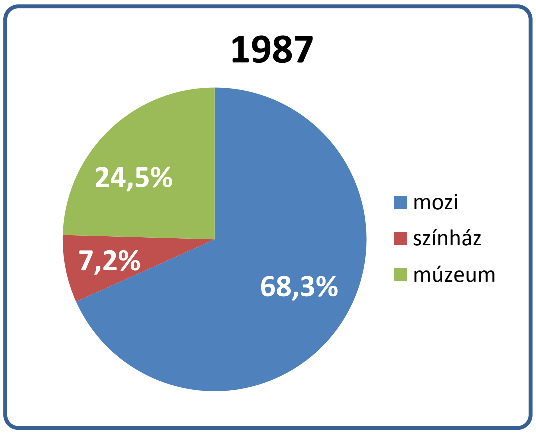
b) Évente átlagosan hány százalékkal változott a látogatók száma a mozi, a színház és a múzeum esetében?

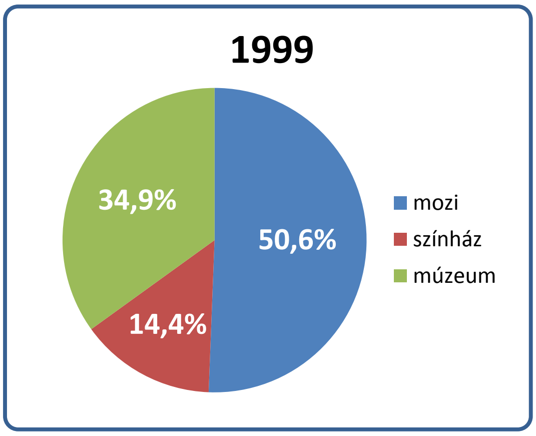
Megoldás:

a) A kördiagram elkészítéséhez szükséges százalékos gyakoriságok és középponti szögek:

év	mozi	színház	múzeum	összesen (ezer fő)
1987	68,3%	7,2%	24,5%	817,67
1987	245,82°	25,84°	88,35°	
1999	50,6%	14,4%	34,9%	277,98
1999	182,23°	51,97°	125,80°	

A kördiagramok:





b) 1987-től 1999-ig 12 év telt el. Jelöljük a-val az 1987-es, b-vel az 1999-es látogatószámot és $(1+x)$-szel azt az arányszámot, ahányszorosára változott évente a látogatószám.

x értékét a következő egyenlet megoldása adja:

$$a(1+x)^{12} = b.$$

Ennek megoldása:

$$x = \sqrt[12]{\frac{b}{a}} - 1.$$

Az évenkénti átlagos százalékos változást az alábbi táblázat tartalmazza.

mozi	színház	múzeum
$\approx -10{,}85\%$	$\approx -3{,}12\%$	$\approx -5{,}87\%$

8. Az alábbi táblázat egy tőzsde indexének napi alakulását mutatja óránkénti lebontásban négy napra vonatkozólag. A tőzsde délelőtt 9 órakor nyitott és délután 4 órakor zárt.

	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
március 23.	8498	8300	8115	7800	7625	7854	7866	7997
március 24.	7797	7600	7420	6900	6788	7210	7405	7125
március 25.	7125	8200	8150	8159	8111	8321	8245	7652
március 26.	7652	8554	8540	8654	8541	8415	8305	8299

a) Adja meg a táblázatban szereplő napokra vonatkozólag az indexek maximális, minimális és záróértékeit, valamint a négy nap adatai által alkotott minta terjedelmét a táblázat adatai alapján!

b) Adja meg, hogy hány százalékkal változott a záróindex az előző napi záróértékhez képest 24-én, 25-én és 26-án!

c) Ábrázolja oszlopdiagramon az előbbi százalékos változásokat a három napra vonatkozólag! Az abszcissza-tengely minden nap az előző napi záróindexnek megfelelő 100%-ot képviseli.

Megoldás:

a) A maximális, a minimális és a záróindex értékei a táblázat alapján:

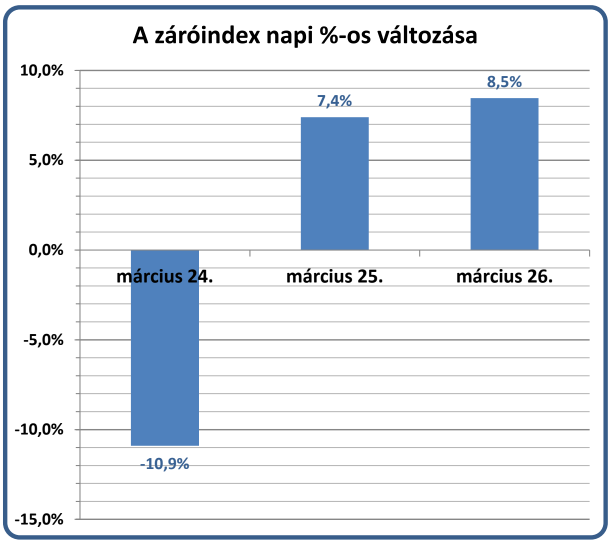
dátum	maximum	minimum	záró
március 23.	8498	7625	7997
március 24.	7797	**6788**	7125
március 25.	8245	7125	7652
március 26.	**8654**	7652	8299

A négy nap adatai által alkotott minta terjedelme: $8654 - 6788 = 1866$.

b) Ha a és b jelöli két egymást követő nap záróindexeit, akkor a keresett százalékos megváltozást a $\frac{b-a}{a}$ hányados százalékban kifejezett értéke adja:

	záróérték	megváltozás
március 23.	7997	-
március 24.	7125	$\approx -10{,}9\%$
március 25.	7652	$\approx 7{,}4\%$
március 26.	8299	$\approx 8{,}5\%$

c) A napi záróindex százalékos megváltozásai oszlopdiagramon:



9. A fogyasztói árindex alakulását mutatja két országban az alábbi táblázat.

év	Magyarország (%)	Nagy-Britannia (%)
1992	100	100
1993	122,5	101,6
1994	118,8	102,5
1995	128,2	103,4
1996	123,6	102,5
1997	118,3	103,1

Az árindex azt mutatja meg, hogy az előző évinek hány százaléka az aktuális évi árszínvonal.

a) Készítsen táblázatot, amelyben megadja mindkét ország árszínvonalait 1997-ig évente az 1992. évihez viszonyítva!

b) Ábrázolja vonaldiagramon a kapott árszínvonalakat az évek függvényében!

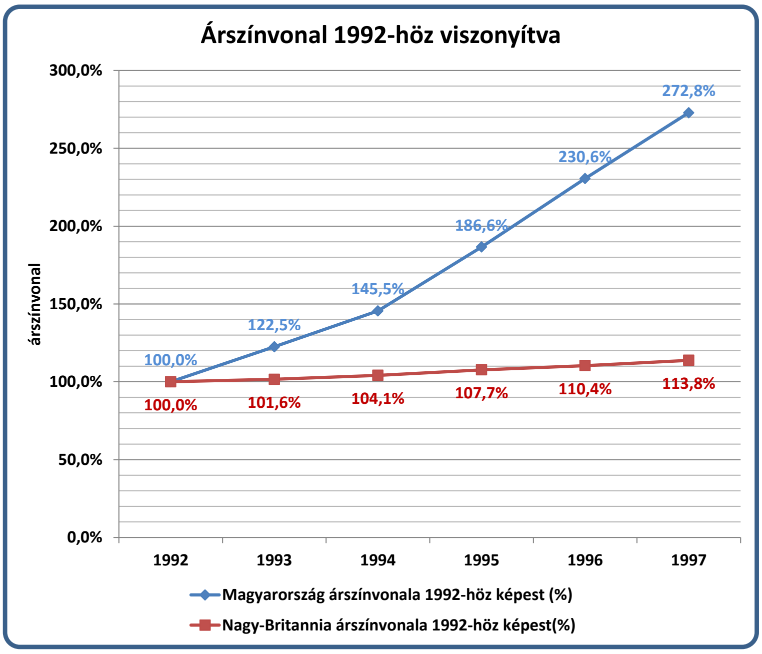
c) Hányszorosa a magyarországi átlagos évi árszínvonal-növekedés a britnek az 1992-1997-ig tartó időszakban?

Megoldás:

a) Ha a-val és b-vel jelöljük két egymást követő év árszínvonalát 1992-höz képest és p az árindex a második évben, akkor $b = a \cdot p$. Ezt felhasználva az árszínvonalak a két országban:

	Magyarország árindex	Nagy-Britannia árindex	Magyarország árszínvonala 1992-höz képest	Nagy-Britannia árszínvonala 1992-höz képest
1992	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
1993	122,5%	101,6%	122,5%	101,6%
1994	118,8%	102,5%	145,5%	104,1%
1995	128,2%	103,4%	186,6%	107,7%
1996	123,6%	102,5%	230,6%	110,4%
1997	118,3%	103,1%	272,8%	113,8%

Az árszínvonal-diagram:



b) x-szel jelöljük az éves átlagos százalékos árszínvonal emelkedést, akkor a 7. feladat b) pontjának gondolatmenete alapján:

$$x=\sqrt[5]{\frac{\text{az 1997. évi árszínvonal}}{\text{az 1992. évi árszínvonal}}}-1$$

százalékban kifejezve. Ezek az értékek:

Magyarország	$\sqrt[5]{\frac{272,8}{100}}-1\approx 0,222=22,2\%;$
Nagy-Britannia	$\sqrt[5]{\frac{113,8}{100}}-1\approx 0,026=2,6\%.$

A keresett arány: $\frac{22,2\%}{2,6\%}\approx 8,5$, tehát Magyarországon átlagosan 8,5-ször akkora volt az éves átlagos árszínvonal-emelkedés, mint Nagy-Britanniában.

10. Egy évfolyamon három tanulócsoport oldotta meg ugyanazt a matematika feladatsort. Az egyes csoportok teljesítménye 68%, 48% és 72% volt. Ugyanebben a sorrendben a csoportlétszámok 23, 30 és 15. Adja meg az összes tanuló átlagos teljesítményét százalékban!

Megoldás:

Vezessük be a következő jelöléseket!

$\overline{x}=0,68$	$k=23$
$\overline{y}=0,48$	$l=30$
$\overline{v}=0,72$	$m=15$

Az együttes átlag:

$$\overline{z}=\frac{k\cdot\overline{x}+l\cdot\overline{y}+m\cdot\overline{v}}{k+l+m}=\frac{23\cdot 0,68+30\cdot 0,48+15\cdot 0,72}{23+30+15}=\frac{40,84}{68}\approx 0,601=60,1\%.$$

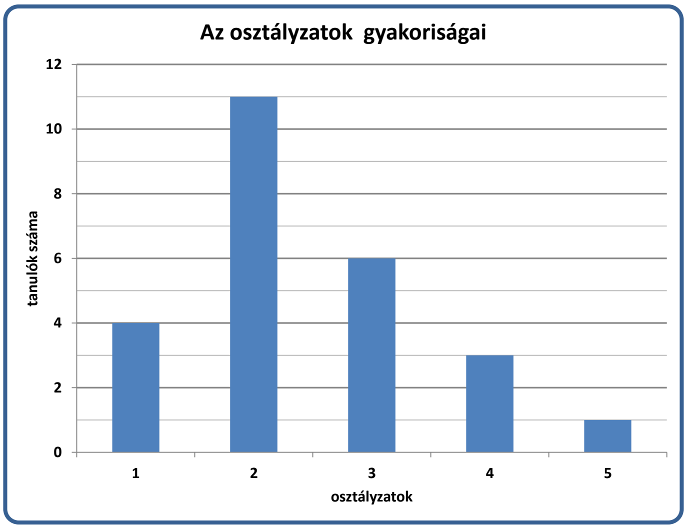
IV. Ellenőrző feladatok

1. Paradicsomszedéskor véletlenszerűen kiválasztottak egy teli ládát, és egyenként megmérték a benne lévő paradicsomokat. A mért adatokat 10 grammra kerekítve az alábbi táblázatban rögzítették.

tömeg	70	80	90	100	110	120	130	140	150
gyakoriság	2	3	6	12	19	17	8	1	2

   a) Ábrázolja az adatokat oszlopdiagramon!
   b) Adja meg azt a tömegértéket, amelyhez képest a megmért paradicsomok tömegeinek átlagos négyzetes eltérése minimális!
   c) Adja meg a paradicsomok tömegének szórását!

2. Az alábbi diagramon egy osztály fizika dolgozatainak eredménye látható.



   a) A diagram alapján készítse el a jegyek gyakoriságát és relatív gyakoriságát tartalmazó táblázatot!
   b) Ábrázolja kördiagramon a jegyek százalékos gyakoriságát!
   c) Legalább hány tanulónak kellett volna kettes helyett ötöst kapnia ahhoz, hogy a jegyek mediánja négyes legyen?

3. Az alábbi táblázatban néhány hónap maximális, minimális és középhőmérsékletének értéke szerepel °C-ban.

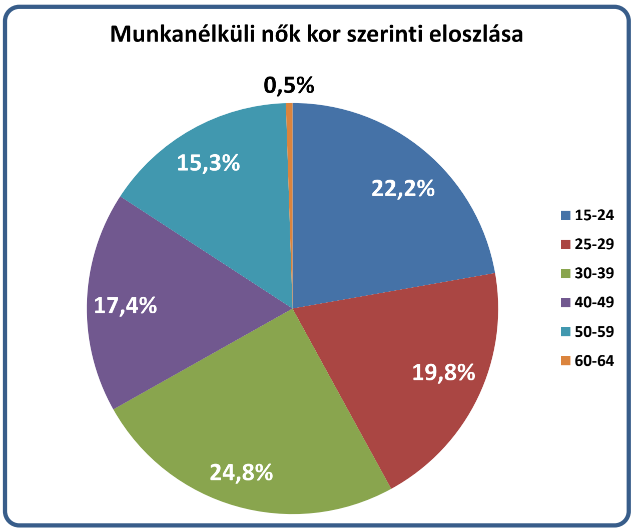
hónap	abszolút maximum	abszolút minimum	középhőmérséklet
április	24,1	3,4	13,3
május	30,3	7,2	16,9
június	30	9,1	20,1
július	34,5	15,2	23,1
augusztus	32,2	12,1	21,3

   a) Ábrázolja vonaldiagramon a megadott hónapok hőmérsékletadatait!
   b) Adja meg azt a hőmérsékletértéket, amelyhez képest a középhőmérsékletek átlagos abszolút eltérése minimális!
   c) Adja meg a középhőmérsékletek átlagos minimális eltérését!

d) Adja meg az öt hónapra vonatkozó hőmérsékletadatok terjedelmét!

e) Átlagosan havonta hány százalékkal emelkedett áprilistól augusztusig az abszolút minimum-hőmérséklet értéke?

4. Az alábbi kördiagram egy adott évben készített felmérés alapján 80 ezer munkanélküli nő korosztály szerinti százalékos eloszlását mutatja.



a) A kördiagram alapján ábrázolja oszlopdiagramon az egyes korosztályok gyakoriságait!

b) Adjon becslést a munkavállaló nők átlagéletkorára, ha az egyes korosztályokba tartozó nők mindegyikének életkorát a korosztály alsó és felső határának számtani közepével egyenlőnek tekintjük!

5. Két osztállyal megíratták ugyanazt a felmérő dolgozatot. Az egyikben 68 pont lett az átlag, a másikban 3 tanuló hiányzott, így a hiányzók nélküli átlag 53 pontnak adódott. Később a hiányzó 3 tanuló is megírta a felmérőt 45, 79 és 67 pontosra. Az átlagot újraszámolták. Az első osztályba 25, a másodikba 32 tanuló jár. Adja meg a két osztály együttes átlagát!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

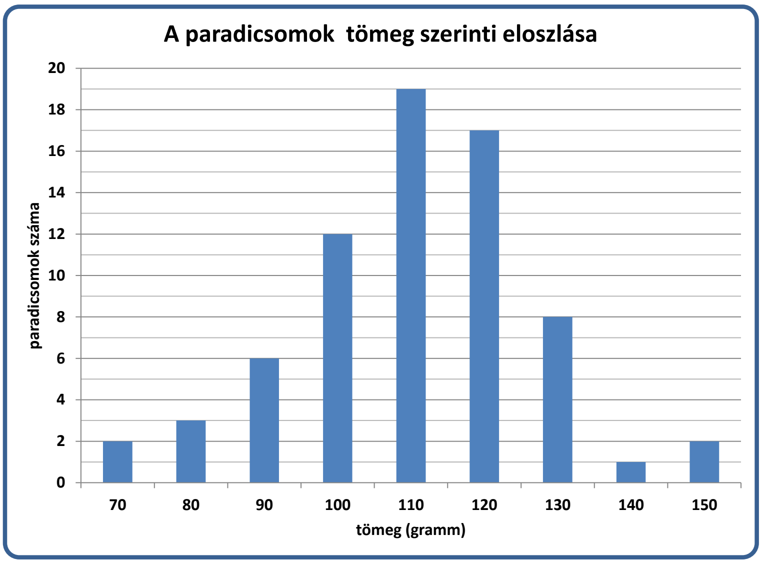
1. Paradicsomszedéskor véletlenszerűen kiválasztottak egy teli ládát, és egyenként megmérték a benne lévő paradicsomokat. A mért adatokat 10 grammra kerekítve az alábbi táblázatban rögzítették.

tömeg	70	80	90	100	110	120	130	140	150
gyakoriság	2	3	6	12	19	17	8	1	2

a) Ábrázolja az adatokat oszlopdiagramon!
b) Adja meg azt a tömegértéket, amelyhez képest a megmért paradicsomok tömegeinek átlagos négyzetes eltérése minimális!
c) Adja meg a paradicsomok tömegének szórását!

Megoldás:

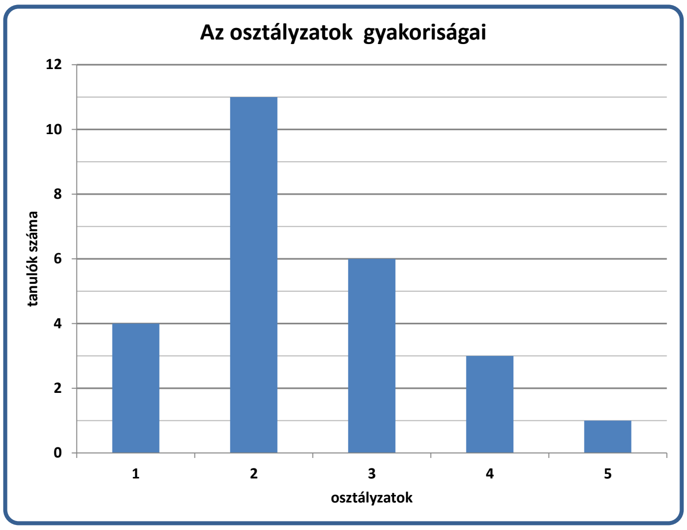
a) A paradicsomok tömeg szerinti eloszlása oszlopdiagramon:



b) Az átlagos négyzetes eltérés a számtani középhez viszonyítva minimális, ezért a keresett szám a tömegeknek a gyakoriságaikkal súlyozott számtani közepe: $\overline{x} \approx 110{,}4$ g.

c) A paradicsomok tömegének szórása: $D_{70} \approx 16{,}3$ g. (70 paradicsom volt a ládában.)

2. Az alábbi diagramon egy osztály fizika dolgozatainak eredménye látható.



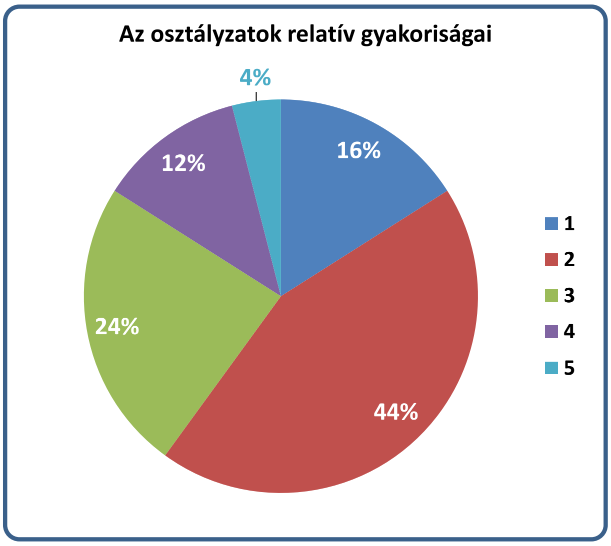
a) A diagram alapján készítse el a jegyek gyakoriságát és relatív gyakoriságát tartalmazó táblázatot!
b) Ábrázolja kördiagramon a jegyek százalékos gyakoriságát!
c) Legalább hány tanulónak kellett volna kettes helyett ötöst kapnia ahhoz, hogy a jegyek mediánja négyes legyen?

Megoldás:

a) A gyakorisági és a relatív gyakorisági táblázat:

osztályzat	1	2	3	4	5
gyakoriság	4	11	6	3	1
relatív gyakoriság	0,16	0,44	0,24	0,12	0,04

b) A jegyek százalékos gyakorisága kördiagramon:



c) A gyakoriságok összege 25, ezért az osztálylétszám is 25. A medián a 13. elem a jegyek növekvő sorrendjében, ami a 2.

Ahhoz, hogy a medián 4 legyen, a 13. jegynek négyesnek kell lennie. Jelenleg a 22. az első négyes. Ennek az első négyesnek $22 - 13 = 9$ hellyel kell lejjebb kerülnie a sorrendben. Ezért a 11 kettes eredményű tanuló közül legalább 9-nek kellett volna ötöst kapnia kettes helyett. Az új gyakorisági táblázat ekkor:

osztályzat	1	2	3	4	5
gyakoriság	4	$11 - 9 = 2$	6	3	$1 + 9 = 10$

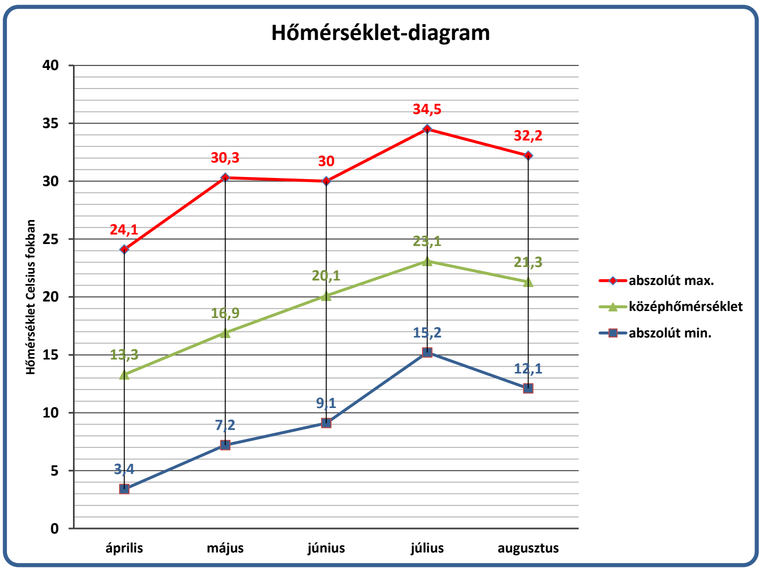
3. Az alábbi táblázatban néhány hónap maximális, minimális és középhőmérsékletének értéke szerepel °C-ban.

hónap	abszolút maximum	abszolút minimum	középhőmérséklet
április	24,1	3,4	13,3
május	30,3	7,2	16,9
június	30	9,1	20,1
július	34,5	15,2	23,1
augusztus	32,2	12,1	21,3

a) Ábrázolja vonaldiagramon a megadott hónapok hőmérsékletadatait!
b) Adja meg azt a hőmérsékletértéket, amelyhez képest a középhőmérsékletek átlagos abszolút eltérése minimális!
c) Adja meg a középhőmérsékletek átlagos minimális eltérését!
d) Adja meg az öt hónapra vonatkozó hőmérsékletadatok terjedelmét!
e) Átlagosan havonta hány százalékkal emelkedett áprilistól augusztusig az abszolút minimum-hőmérséklet értéke?

Megoldás:

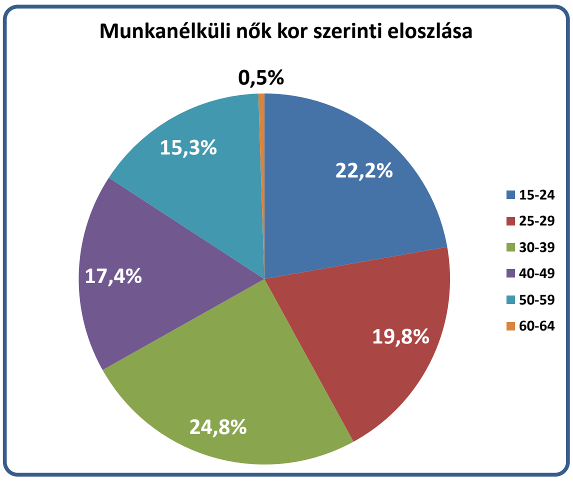
a) A hőmérséklet-diagram:



b) Az átlagos abszolút eltérés a mediánhoz képest minimális. A középhőmérséklet mediánja az öt növekvő sorrendbe rakott érték közül a harmadik: 20,1 °C.
c) A középhőmérsékletek átlagos minimális eltérése: $S_5(20{,}1) = 2{,}84$ °C.
d) A hőmérsékletadatok terjedelme: $34{,}5$ °C $- 3{,}4$ °C $= 31{,}1$ °C.
e) Az abszolút minimum hőmérséklet áprilisban: 3,4 °C, augusztusban pedig 12,1 °C.

Havonta átlagosan: $\sqrt[4]{\frac{12{,}1}{3{,}4}} - 1 \approx 37{,}35\%$-kal emelkedett a hőmérséklet áprilistól augusztusig.

4. Az alábbi kördiagram egy adott évben készített felmérés alapján 80 ezer munkanélküli nő korosztály szerinti százalékos eloszlását mutatja.



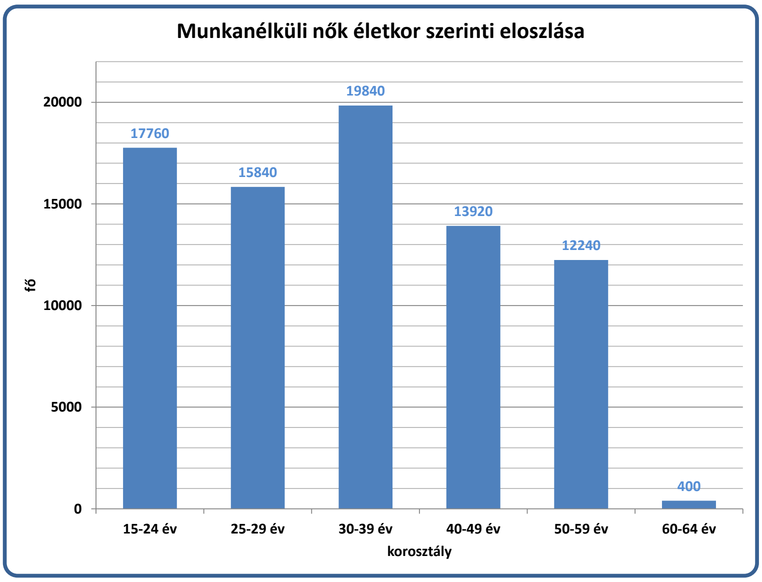
a) A kördiagram alapján ábrázolja oszlopdiagramon az egyes korosztályok gyakoriságait!
b) Adjon becslést a munkavállaló nők átlagéletkorára, ha az egyes korosztályokba tartozó nők mindegyikének életkorát a korosztály alsó és felső határának számtani közepével egyenlőnek tekintjük!

Megoldás:

a) A kördiagramról leolvashatók a százalékos gyakoriságok. A gyakoriságokat ezek segítségével adhatjuk meg, felhasználva hogy a 100%-nak 80000 fő felel meg.

korosztály	15-24 év	25-29 év	30-39 év	40-49 év	50-59 év	60-64 év
%-os gyakoriság	22,2%	19,8%	24,8%	17,4%	15,3%	0,5%
gyakoriság	17760	15840	19840	13920	12240	400

A gyakorisági diagram:



b) A becsült átlagéletkort az alábbi táblázatban szereplő életkoroknak a gyakoriságaikkal súlyozott számtani közepe adja:

korosztály	15-24 év	25-29 év	30-39 év	40-49 év	50-59 év	60-64 év
becsült életkor	19,5	27	34,5	44,5	54,5	62
gyakoriság	17760	15840	19840	13920	12240	400

$\overline{x}_{becsült} \approx 34{,}6$ év.

5. Két osztállyal megíratták ugyanazt a felmérő dolgozatot. Az egyikben 68 pont lett az átlag, a másikban 3 tanuló hiányzott, így a hiányzók nélküli átlag 53 pontnak adódott. Később a hiányzó 3 tanuló is megírta a felmérőt 45, 79 és 67 pontosra. Az átlagot újraszámolták. Az első osztályba 25, a másodikba 32 tanuló jár. Adja meg a két osztály együttes átlagát!

Megoldás:

Az első osztály átlaga: $\overline{x} = 68$, létszáma: $n = 25$.

A második osztály létszáma $m = 32$, átlaga: $\overline{y} = \frac{(m-3)\cdot 53+45+79+67}{m} = 54$.

Az együttes átlag: $\overline{z} = \frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{n+m} = \frac{25\cdot 68+32\cdot 54}{57} = \frac{3428}{57} \approx 60{,}14$.