Koordinátageometria

I. Elméleti összefoglaló

Koordinátákkal adott vektorok

Ha $\boldsymbol{a}(a_1; a_2)$ és $\boldsymbol{b}(b_1; b_2)$ a sík két vektora, λ valós szám, akkor

- az $\boldsymbol{a}$ vektor hossza: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- a két vektor összege : $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\ (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
- a két vektor különbsége: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\ (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$
- vektor számmal való szorzata: $\lambda\boldsymbol{a}\ (\lambda a_1; \lambda a_2)$
- az **a** vektor ellentettje: $-\boldsymbol{a}\ (-a_1; -a_2)$
- a két vektor skaláris szorzata: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Az $A(a_1; a_2)$ pontból a $B(b_1; b_2)$ pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok távolsága: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

Ha az $\boldsymbol{a}(a_1; a_2)$ és $\boldsymbol{b}(b_1; b_2)$ vektorok hajlásszöge φ, akkor: $\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Ha az $\boldsymbol{a}(a_1; a_2)$ vektort +90°-kal elforgatjuk, az $\boldsymbol{a}'(-a_2; a_1)$ vektort,

ha –90°-kal elforgatjuk, az $\boldsymbol{a}''(a_2; -a_1)$ vektort kapjuk.

Szakasz adott arányú osztópontja, háromszög súlypontja

Ha $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ a sík pontjai, akkor

- az AB szakasz F felezőpontja: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
- az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja: $F\left(\frac{2a_1 + b_1}{3}; \frac{2a_2 + b_2}{3}\right)$
- az AB szakaszt m:n arányban osztó P pont: $P\left(\frac{n \cdot a_1 + m \cdot b_1}{n + m}; \frac{n \cdot a_2 + m \cdot b_2}{n + m}\right)$
- az ABC háromszög S súlypontja: $S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$

Egyenes egyenlete

- **Normálvektoros egyenlet:**
  Az $\boldsymbol{n}(A; B)$ nem nullvektort az egyenes **normálvektorának** nevezzük, ha merőleges az egyenesre.
  A $P(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\boldsymbol{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete:
  $$Ax + By = Ax_0 + By_0$$
- **Irányvektoros egyenlet:**
  A $\boldsymbol{v}(v_1; v_2)$ nem nullvektort az egyenes **irányvektorának** nevezzük, ha párhuzamos az egyenessel.
  A $P(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\boldsymbol{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete:
  $$v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0$$
- **Iránytényezős egyenlet:**
  Az egyenesnek az x-tengely pozitív irányával bezárt szögét az egyenes **irányszögének**

nevezzük.
Ha az egyenes φ irányszöge nem 90°, akkor az $m = tg\ \varphi$ számot az egyenes **iránytényezőjének (meredekségének)** nevezzük.
A $P(x_0; y_0)$ ponton m iránytényezőjű egyenes egyenlete:

$$y - y_0 = m(x - x_0)\ .$$

- **Két egyenes párhuzamos, ha**
  - normálvektoraik párhuzamosak;
  - irányvektoraik párhuzamosak;
  - irányszögük egyenlő;
  - iránytényezőjük egyenlő (ha van).
- **Két egyenes merőleges, ha**
  - normálvektoraik merőlegesek → normálvektoraik skaláris szorzata 0;
  - irányvektoraik merőlegesek → irányvektoraik skaláris szorzata 0;
  - a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenesek iránytényezőinek szorzata -1.
- **Két egyenes metszéspontját** úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert.

Kör egyenlete

- Az $O(u, v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete**:

  $$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2\ .$$
- **Kör és egyenes közös pontjait** úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert.
- **Két kör közös pontjait** úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a két egyenletéből álló egyenletrendszert.

II. Kidolgozott feladatok

1. Adott az $\boldsymbol{a}(2;3)$; $\boldsymbol{b}(6;2)$; $\boldsymbol{c}(4;5)$ vektor. Számítsuk ki az alábbi vektorok koordinátáit:

$$\boldsymbol{a+2b}$$
$$3\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{c} + \frac{3}{4}\boldsymbol{b} \quad !$$

Megoldás:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (2+2\cdot 6; 3+2\cdot 2) = (14;7)$$
$$3\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = \left(3\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 6; 3\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) = (3;8)$$
$$\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{c} + \frac{3}{4}\boldsymbol{b} = \left(2 - 2\cdot 4 + \frac{3}{4}\cdot 6; 3 - 2\cdot 5 + \frac{3}{4}\cdot 2\right) = (-1{,}5; -5.5)$$

3. Adott az $A(7;-3)$ és $B(12;-4)$ pont. Hosszabbítsuk meg az AB szakaszt a B-n túl a háromszorosára! Számítsuk ki az így kapott C pont koordinátáit!

Megoldás:

A B pont az AC szakasznak az A ponthoz közelebbi harmadoló pontja. Így a $C(c_1;c_2)$ pontra teljesül:

$$\frac{2\cdot 7 + c_1}{3} = 12 \quad \textit{és} \quad \frac{2\cdot(-3)+c_2}{3} = -4$$

Az egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a C pont koordinátáit: $c_1 = 22$ $c_2 = -6$.

4. Igazoljuk, hogy az $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(2;8)$, $D(-1;4)$ pontok egy paralelogramma csúcsai!

Megoldás:

$\overrightarrow{AB} = (4-1; 7-3) = (3;4)$; $\overrightarrow{DC} = (2-(-1); 8-4) = (3;4)$. Ennek alapján az AB szakasz párhuzamos és egyenlő a DC szakasszal, tehát az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

5. Adott az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(2;3)$; $B(13;4)$; $C(6;9)$. Határozzuk meg
   a) az α (A *csúcsnál lévő*) szög nagyságát;
   b) az ABC háromszög területét!

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB} = (11;1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{11^2+1} = \sqrt{122}$, $\overrightarrow{AC} = (4;6)$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52}$.

A skaláris szorzat definíciója alapján: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Ha a skaláris szorzatot kifejezzük a vektorok koordinátáival, akkor

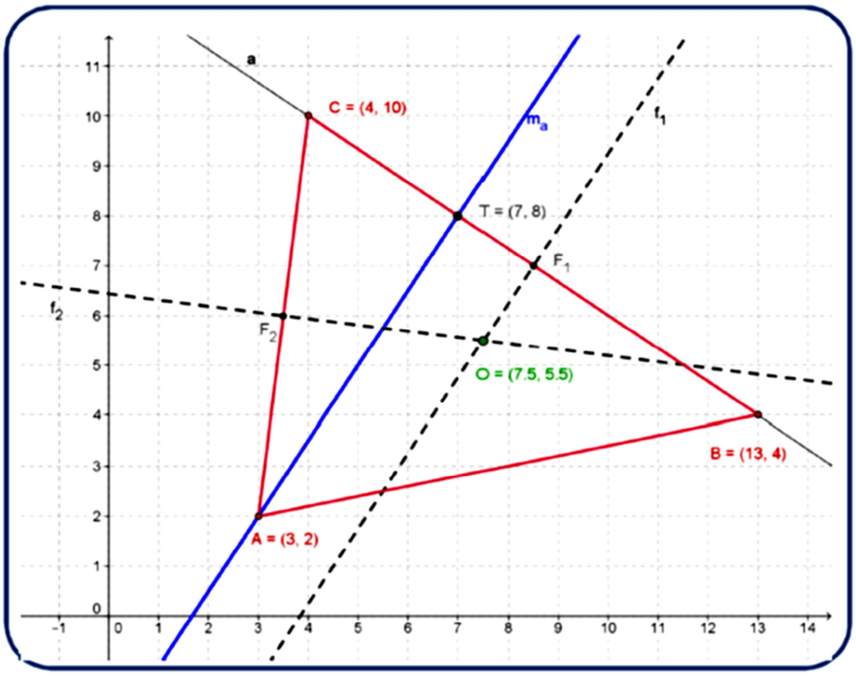
$$\cos\alpha = \frac{11 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{\sqrt{122} \cdot \sqrt{52}} = 0{,}6276\,; \quad \alpha = 51{,}12°\,.$$

b) A háromszög területét két oldalból és a közbezárt szögből számoljuk ki:

$$t = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{122} \cdot \sin 51{,}12°}{2} = 31\,.$$

6. Adott az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(3;2)$; $B(13,4)$; $C(4;10)$. Határozzuk meg
   a) az A csúcsból induló magasságvonal egyenletét;
   b) a BC oldal egyenletét;
   c) az A csúcsból induló magasság hosszát;
   d) a háromszög köré írható körének középpontját!

Megoldás:



a) A $\overrightarrow{BC} = (-9; 6)$ vektor az A csúcsból induló magasságvonal normálvektora. Az 1/3 ekkora $\boldsymbol{n} = (-3; 2)$ normálvektort is használhatjuk az egyenes egyenletének felírásához. A magasságvonal átmegy az $A\,(3; 2)$ ponton, így a magasságvonal egyenletét a normálvektor segítségével felírhatjuk:

$$m_a:\ -3x + 2y = -9 + 4 = -5.$$

b) Az $\overrightarrow{BC}$ vektor a BC oldal irányvektora $\boldsymbol{v} = (-9; 6)$. Az oldal átmegy a $B\,(13; 4)$ ponton, tehát a BC egyenes egyenletét a $\boldsymbol{v_1} = (-3; 2)$ irányvektorral felírva:

$$a:\ 2x + 3y = 26 + 12 = 34.$$

c) Az pontból induló magasság talppontja az m_a egyenes és az a egyenes metszéspontja. Ezért a T pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg:

$$m_a:\ 3x - 2y = 5$$
$$a:\ 2x + 3y = 38\ \ ,$$

A $T(7; 8)$ és $A(3; 2)$ pontok távolságának kiszámításával határozzuk meg a magasság hosszát:

$$\sqrt{(7-3)^2 + (8-2)^2} = 7{,}21\ .$$

d) A háromszög körülírt körének a középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként kapjuk meg. A BC oldal felezőpontja $F_1\left(\frac{4+13}{2}; \frac{4+10}{2}\right) = (8{,}5; 7)$. A BC f_1 oldalfelező merőlegesének normálvektora

$$\boldsymbol{n_1} = (-3; 2),\text{ egy pontja } \quad F_1.$$

Így az oldalfelező merőleges egyenlete:

$$f_1:\ -3x + 2y = -11{,}5.$$

Hasonlóan írjuk fel az AC oldalfelező merőlegesének egyenletét:

$$F_2\left(\frac{4+3}{2}; \frac{10+2}{2}\right) = (3{,}5; 6)$$
$$\boldsymbol{n_2} = (1; 8)$$
$$f_2:\ x + 8y = 51{,}5$$

Az f_1 és f_2 egyenesek metszéspontját a megfelelő egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg. Így megkapjuk a háromszög köré írt körének $O(7{,}5;\ 5{,}5)$ középpontját.

9. Igazoljuk, hogy az $k: x^2 + y^2 - 18x + 6y + 65 = 0$ egyenlet kör egyenlete.
   a) Írjuk fel az adott körrel koncentrikus, a $P(2; 4)$ ponton átmenő kör egyenletét!
   b) Írjuk fel a k kör $E(6; 1)$ ponton átmenő érintőjének egyenletét!
   c) Adott az $F(8; -6)$ pont. Határozzuk meg a k körön az A és B pontokat úgy, hogy az F pont az AB húr felezőpontja legyen!

Megoldás:

Teljes négyzetté kiegészítéssel átalakítjuk az adott egyenletet:

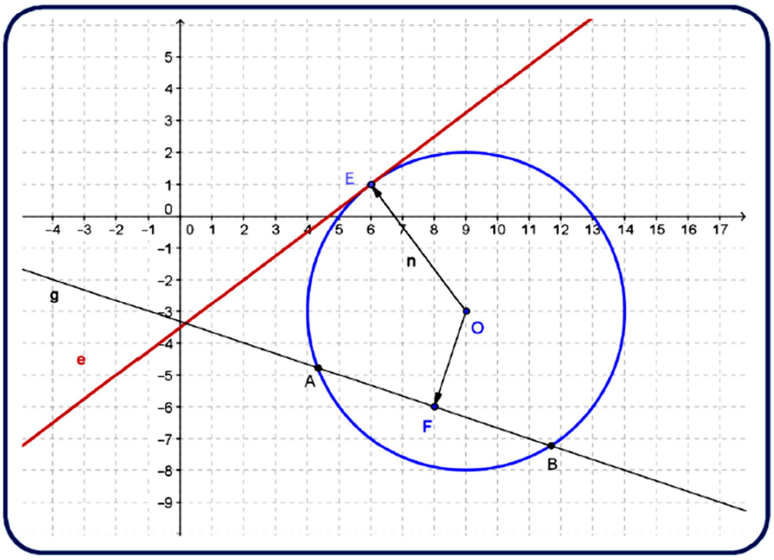
$$x^2 - 18x + 81 + y^2 + 6y + 9 - 25 = 0$$

$$k: (x-9)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Ez az egyenlet az $O(9; -3)$ középpontú, 5 egység sugarú kör egyenlete.

a) Az OP távolság $\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{98}$. Így a koncentrikus kor egyenlete:

$$k_1: (x-9)^2+(y+3)^2=98\ .$$



b) Az E pont koordinátái kielégítik a k kör egyenletét, tehát a pont rajta van a körön. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért az $\overrightarrow{OE}=(-3;4)$ vektor az érintő normálvektora. Így az érintő egyenlete:

$$e: -3x+4y=-14$$

c) Az F pont koordinátáit behelyettesítjük be a kör egyenletébe:

$$(8-9)^2+(-6+3)^2=10<25\ ,$$

ezért az F pont a körvonalon belül van. A középpontból a húrra bocsátott merőleges felezi a húrt, ezért az OF szakaszra az F pontban merőlegest állítunk. Az így kapott g egyenes kimetszi a körvonalból az A és B pontokat.

$$g:\ \boldsymbol{n}=\overrightarrow{FO}=(1;3)$$
$$F(8;-6)$$

$$g: x+3y=-10$$
$$k: (x-9)^2+(y+3)^2=25$$

A k kör és a g egyenes közös pontjait megkapjuk, ha megoldjuk a fenti egyenletrendszert.

$$x=-3y-10$$
$$k: (-3y-19)^2+(y+3)^2=25$$

Egyenletrendezés után az

$$y^2+12y+34{,}5=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, aminek a gyökei: $y_1=-4{,}78$ és $y_2=-7{,}22$.
A megfelelő x értékek: $x_1=4{,}34$ és $x_2=11{,}66$.
A keresett pontok $A=(4{,}34;-4{,}78)$ és $B=(11{,}66;-7{,}22)$.

III. Ajánlott feladatok

1. Adott az $\boldsymbol{a}(-5; 2)$; $\boldsymbol{b}(7; -4)$; $\boldsymbol{c}(0; 3)$; $\boldsymbol{d}(1; 6)$. Határozza meg a következő vektorok koordinátáit:

a) $-\boldsymbol{a}$	b) $-\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$	c) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$	d) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \frac{3}{4}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$
e) $\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}$	f) $\boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{c} + \frac{3}{2}\mathrm{a}$	g) $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}}{5}$	h) $\frac{\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}}{3}$

2. Egy háromszög csúcsai: $A(5; 2)$; $B(-3; 8)$; $C(10; 14)$. A háromszöget a koordináta-rendszer kezdőpontja körül +90°-kal elforgatva az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Határozzuk meg az elforgatott háromszög csúcsainak koordinátáit!

3. Számítsuk ki az $\boldsymbol{a}(-7; 5)$ és $\boldsymbol{b}(2; -4)$ vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét!

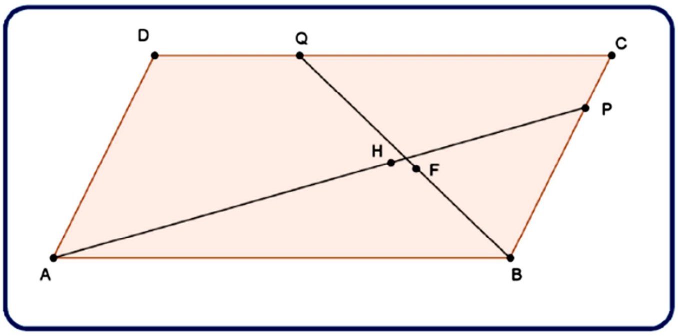
4. Határozzuk meg a b értéket úgy, hogy az $\boldsymbol{a}(-3; 12)$ és $\boldsymbol{b}(8; b)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

5. Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A(3; -6)$; $B(11; -1)$; $C(8; 4)$; $D(3; 3)$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra! Számítsuk ki a négyszög területét!

6. Az $A(2; 5)$ és $B(-7; 12)$ pontokat összekötő szakaszt a $P; Q; R$ pontok 4 egyenlő szakaszra osztják. Adjuk meg a $P; Q; R$ pontok koordinátáit!

7. Az ABC háromszög két csúcsa $A(5; -4)$ és $B(13; 1)$, súlypontja $S(7; 4)$. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit!

8. Az $A(0; 0)$; $B(9; 0)$; $C(11; 4)$; $D(2; 4)$ pontok egy paralelogrammát határoznak meg. A P pont a BC oldal C-hez közelebbi negyedelő pontja, a Q pont a DC szakasz D-hez közelebbi harmadoló pontja.



   a) Határozzuk meg annak a H pontnak a koordinátáit, amely az AP szakaszt 2:1 arányban osztja!
   b) Határozzuk meg a BQ szakasz F felezőpontját!
   c) Mit tapasztalunk? Fogalmazzuk meg általánosan az észrevételünket!

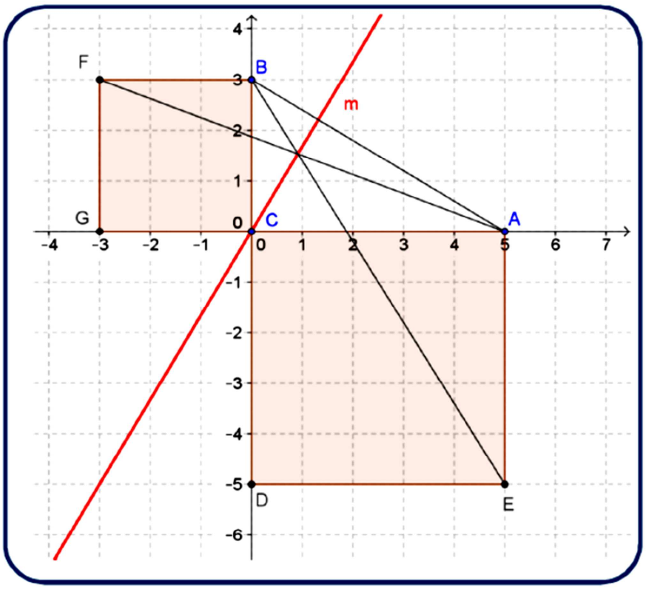
9. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

   a) átmegy a $P(2;-5)$ ponton és normálvektora $\boldsymbol{n}(-5;2)$;
   b) átmegy a $P(-4;6)$ ponton és irányvektora $\boldsymbol{v}(-3;1)$;
   c) átmegy a $P(3;-2)$ ponton és a meredeksége $m=1{,}2$;
   d) átmegy az $A(2;-1)$ és a $B(6;-3)$ pontokon!

10. Egy háromszög egyik csúcsa $A(3;-4)$, két magasságvonalának egyenlete $7x-2y-1=0$ és $2x-7y-6=0$. Határozzuk meg a hiányzó csúcspontok koordinátáit!

11. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$. Középpontja az (2;1) pont. Adjuk meg a csúcsok koordinátáit!

12. Egy derékszögű háromszög csúcspontjai: $A(5;0); B(0;3); C(0;0)$. Az ábra szerint a befogókra négyzeteket rajzolunk.



   a) Írjuk fel az AF és BE egyenesek egyenletét!
   b) Határozzuk meg a két egyenes M metszéspontját!
   c) Írjuk fel a derékszögű háromszög C csúcsából induló magasság egyenesének egyenletét!
   d) Mutassuk meg, hogy a magasságvonal áthalad az Mponton!

14. Egy kör átmérőjének végpontjai $A(-6;11)$ és $B(4;-5)$. Írjuk fel a kör egyenletét!

15. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit és sugarát, ha egyenlete:

   a) $x^2+y^2-10x-4y+13=0$
   b) $x^2+y^2+8x+7=0$
   c) $2x^2+2y^2+12x-6y+10=0$
   d) $x^2+y^2-6x+9=0$

16. Toljuk el az $x^2+y^2-16x+2y+40=0$ egyenletű kört a $\boldsymbol{v}(-3;5)$ vektorral! Írjuk fel az így kapott kör egyenletét!

17. Adott az $x^2+y^2-6x+8y-56=0$ egyenletű kör és az $x-8{,}4=0$ egyenletű egyenes.

   a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!
   b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

18. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek az $A(2;-3)$ ponttól 5 egység távolságra vannak és illeszkednek a $7x-y=-8$ egyenesre!