Halmazok

Jelölések:

A halmazok jele általában nyomtatott nagybetű: *A*, *B*, *C*

Az *x* eleme az *A* halmaznak: $x \in A$

Az *x* nem eleme az *A* halmaznak: $x \notin A$

Az *A* halmaz az *a*, *b*, *c* elemekből áll: $A = \{a, b, c\}$

A halmazban egy elemet csak egyszer sorolunk fel, és a felsorolás sorrendje nem számít.

DEFINÍCIÓ: A halmaz ***véges halmaz***, ha elemeinek számát természetes számmal megadhatjuk.

Példa

a római számok írásához szükséges jelek halmaza: $R = \{M; D; C; L; X; I; V\}$ 7 elemű

DEFINÍCIÓ: A 0 elemű halmazt ***üres halmaz***nak nevezzük, jele: Ø, vagy { }.

DEFINÍCIÓ: A halmaz ***végtelen halmaz***, ha elemeinek száma nem adható meg természetes számmal.

Példa

$A = \{természetes\ számok\}$

Halmazok megadási módja

1. **A halmaz elemeit egyértelműen meghatározó utasítással vagy tulajdonságokkal.**

   Pl.: $C = \{2 - vel\ osztható, 4 - nél\ nem\ nagyobb\ számok\} =$

   $= \{x | x \leq 4 \text{ és } x\ osztható\ \}$

2. **A halmaz elemeinek felsorolásával.**

   Pl.: $G = \{2; 7; 8\}$

DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy ***két halmaz egyenlő***, ha a két halmaz elemei ugyanazok.

A halmazokat szemléltethetjük **Venn-diagram**mal.

Példa

Pozitív egész számok halmaza: N^+

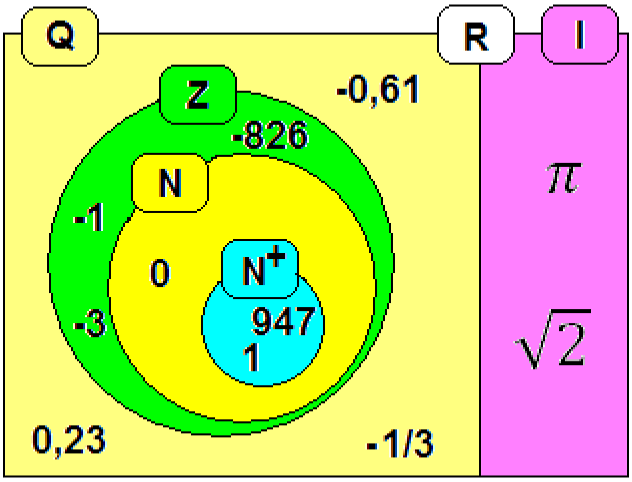
Természetes számok halmaza: N

Egész számok halmaza: Z

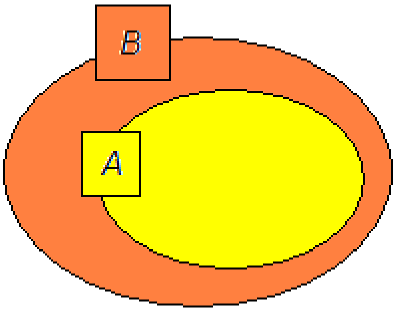
Racionális számok halmaza: Q

Irracionális számok halmaza: I

Valós számok halmaza: R



DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subseteq B$.



DEFINÍCIÓ: Az A halmaz valódi részhalmaza a B halmaznak, ha A részhalmaza B-nek, és a B halmaznak van olyan eleme, amely A-nak nem eleme. Jele: $A \subset B$.

Példa: {páros számok} $\subset$ {egész számok}

Minden halmaz részhalmaza önmagának. $A \subseteq A$

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza. $\emptyset \subseteq A$

Vannak olyan A és B halmazok, melyekre $A \subseteq B$, $A = B$, $B \subseteq A$ közül egyik sem teljesül.

Példa: A={1; 2; 3; 4; 5; 6} és B={3; 4; 5; 6; 7; 8}

Példa

Soroljuk fel az $\{a;\ b;\ c\}$ halmaz összes részhalmazát!

Megoldás:

0 elemű	1 elemű	2 elemű	3 elemű
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;\ b;\ c\}$
	$\{b\}$	$\{a;\ c\}$	
	$\{c\}$	$\{b;\ c\}$	

A háromelemű $\{a;\ b;\ c\}$ halmaznak összesen 8 részhalmaza van. A részhalmazok felsorolásából látszik, hogy **minden 3 elemű halmaznak 2^3 részhalmaza van.**

Az üres halmaznak egy részhalmaza van, önmaga.

Példa

Melyek azok a pontok a síkon, amelyek az adott A ponttól

a) 2 cm

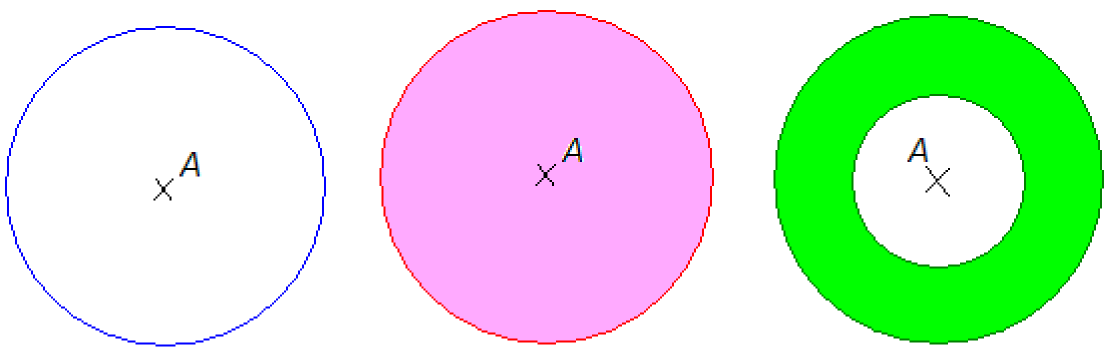
b) legfeljebb 2 cm

c) legalább 1 cm, de legfeljebb 2 cm

távolságra vannak?

Megoldás:

a) b) c)

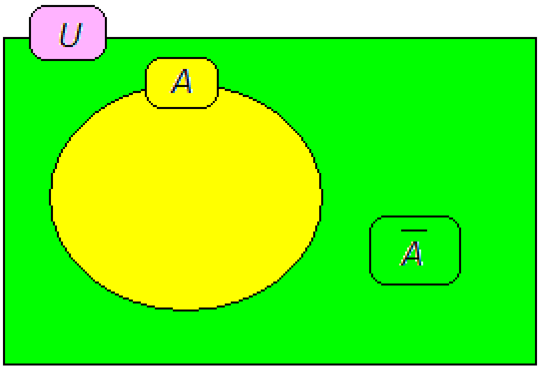


Halmazműveletek

DEFINÍCIÓ: Halmazok vizsgálatakor meg kell adni egy olyan halmazt, melynek a vizsgált halmazok részhalmazai, ezt ***alaphalmaz***nak vagy ***univerzum***nak nevezzük. Jele: U

DEFINÍCIÓ: Egy A halmaz ***komplementerhalmaz***ának nevezzük az alaphalmaz azon elemeinek halmazát, amelyek az A halmaznak nem elemei. Jele: $\bar{A}$

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\}; \quad \bar{\bar{A}} = A; \quad \bar{U} = \emptyset; \quad \bar{\emptyset} = U$$



Példa

Legyen az alaphalmaz U={10-től 30-ig az egész számok}

R={10-től 30-ig a páros számok}={10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30}

S={10-től 30-ig a 3-mal osztható egész számok}={12; 15; 18; 21; 24; 27; 30}

T={10-től 30-ig az 5-tel osztható egész számok}={10; 15; 20; 25; 30}

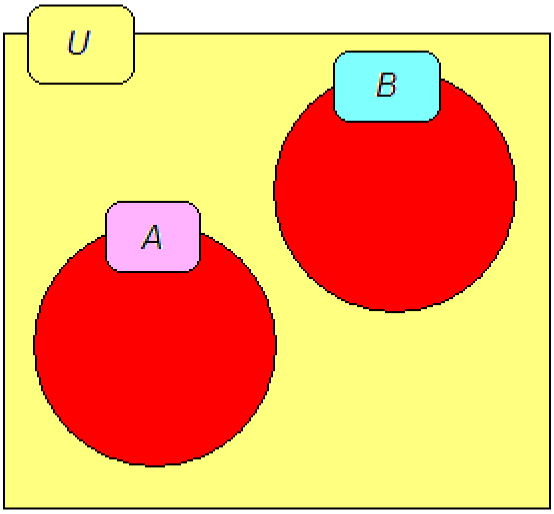
$\bar{R}$={10-től 30-ig a páratlan számok}

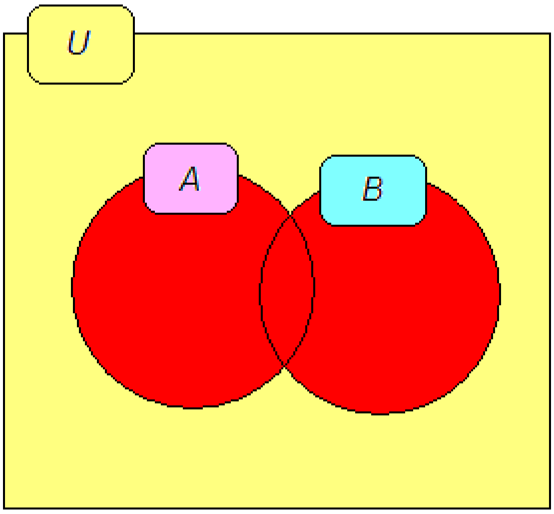
$\bar{S}$={10-től 30-ig a 3-mal nem osztható egész számok}

$\bar{T}$={10-től 30-ig az 5-tel nem osztható egész számok}

DEFINÍCIÓ: Két halmaz ***uniója*** vagy egyesítése mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele: ∪

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$



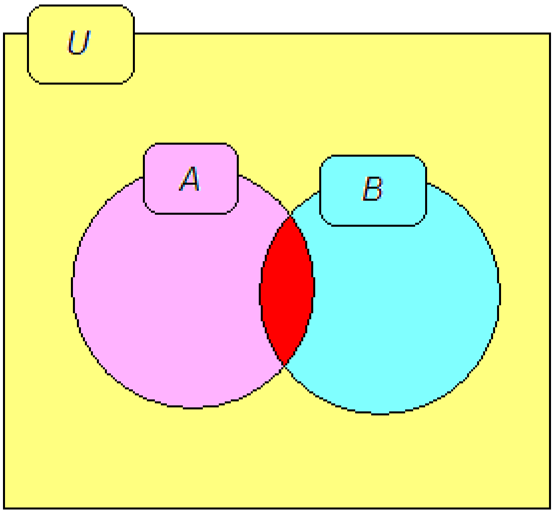


Példa

$$S \cup T = \{10 - \text{től } 30 - \text{ig a } 3 - \text{mal vagy } 5 - \text{tel osztható számok}\} =$$
$$= \{10;\ 12;\ 15;\ 18;\ 20;\ 21;\ 24;\ 25;\ 27;\ 30\}$$

DEFINÍCIÓ: Két halmaz metszete mindazon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei. Jele: ∩

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$$



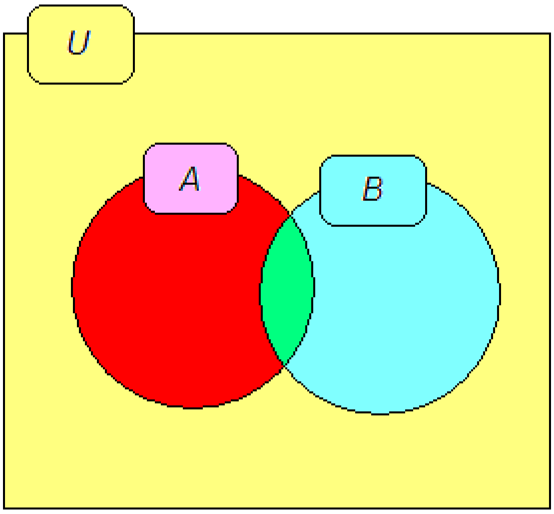
Példa

$$S \cap T = \{10 - \text{től } 30 - \text{ig a } 3 - \text{mal és } 5 - \text{tel osztható számok}\} = \{15; 30\}$$

DEFINÍCIÓ: Két halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük, vagyis metszetük az üres halmaz. Jele: $A \cap B = \emptyset$

DEFINÍCIÓ: Az A és B halmaz különbsége az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei. Jele: $A \setminus B$

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$$



Példa

$$R \setminus S = \{10-\text{től } 30-\text{ig a } 2-\text{vel osztható, de } 3-\text{mal nem osztható számok}\}$$
$$= \{10; 14; 16; 20; 22; 26; 28\}$$

$A \setminus A = \emptyset$; $A \setminus \emptyset = A$; $\emptyset \setminus A = \emptyset$; $U \setminus A = \bar{A}$

Példa

- $\bar{S} \cup \bar{T} =$

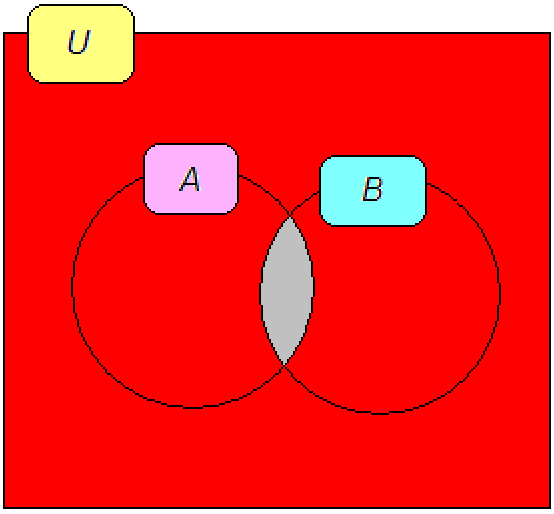
$$= \{10-30-\text{ig a } 3-\text{mal nem osztható számok}\} \cup$$
$$\cup \{10-30-\text{ig az } 5-\text{tel nem osztható számok}\} =$$
$$= \{10-30-\text{ig azok a számok, amelyek nem oszthatók } 3-\text{mal és } 5-\text{tel}$$
$$\text{azaz } 15-\text{tel nem oszthatók}\} =$$
$$= \{10; 11; 12; 13; 14; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29\}$$

- $\bar{S} \cap \bar{T} =$

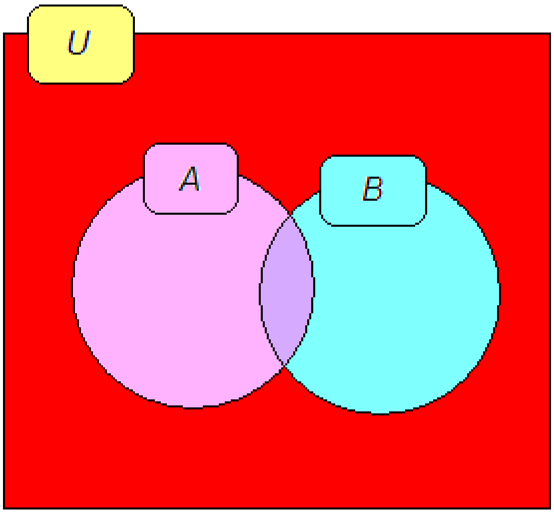
$$= \{10-30-\text{ig a } 3-\text{mal nem osztható számok}\} \cap$$
$$\cap \{10-30-\text{ig az } 5-\text{tel nem osztható számok}\} =$$
$$= \{10-30-\text{ig azok a számok, amelyek se } 3-\text{mal, se } 5-\text{tel nem oszthatók}\} =$$
$$= \{10; 11; 13; 14; 16; 17; 19; 22; 23; 26; 28; 29\}$$

De-Morgan azonosságok:

1. $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$



2. $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$



Halmazok elemszáma

Az *A* halmaz elemszámának jele: $|A|$

Példa

A={kétjegyű négyzetszámok}={16; 25; 36; 49; 64; 81} $|A| = 6$

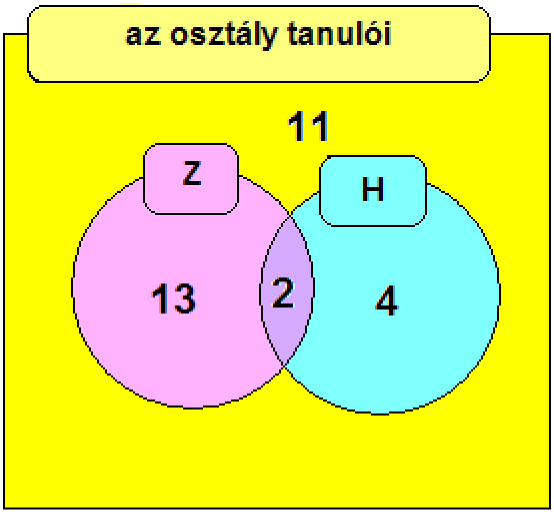
B={sakkjátszma kezdetekor a táblán lévő bábuk}= $|B| = 32$

Példák

Egy 30 fős osztályban tizenöten tanulnak zongorázni, hatan hegedülni, és ketten zongorázni és hegedülni is. Hányan vannak az osztályban, akik se zongorázni, se hegedülni nem tanulnak?

Megoldás:

Készítsünk Venn-diagramot, és írjuk be a megfelelő részekbe, hogy hányan tartoznak abba a részbe.



A zongorázók és hegedülők metszetébe 2-t írunk. Mivel a 15 zongorázó közül 2 hegedül is, 15-2=13 gyerek zongorázik, de nem hegedül. A 6 hegedűs közül 2 zongorázik is, így 6-2=4 gyerek hegedül, de nem zongorázik. Azoknak a száma, akik nem zongoráznak és nem hegedülnek:

$$30 - [(15 - 2) + (6 - 2) + 2] = 30 - (13 + 2 + 4) = 11$$

Logikai szita

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Számegyenesek, intervallumok

Számegyenes: Olyan egyenes, amelyen kijelölünk egy irányt és két pontot, amelyekhez számokat rendelünk. Ezzel meghatározzuk a 0 és az 1 helyét.

A számegyenes minden pontjához tartozik egy valós szám, és fordítva: minden valós számhoz tartozik egy pont a számegyenesen.

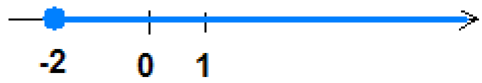
A számegyenes részhalmazai

📖 **félegyenesek**

- ✓ $x \geq -2$;

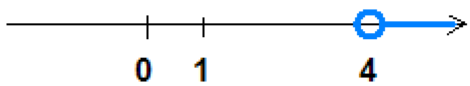
  x nagyobb vagy egyenlő, mint -2;

  x legalább -2



- ✓ $x > 4$;

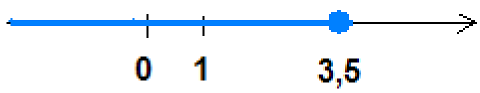
  x nagyobb, mint 4



- ✓ $x \leq 3{,}5$;

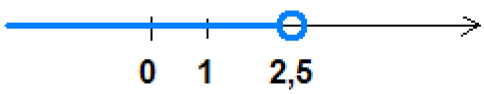
  x kisebb vagy egyenlő, mint 3,5;

  x legfeljebb 3,5



- ✓ $x < 2{,}5$;

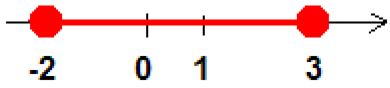
  x kisebb, mint 2,5



intervallumok

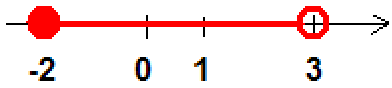
- ✓ *zárt*

  A $[-2;3]$ azon valós számok halmaza, amelyekre *x* nagyobb vagy egyenlő, mint -2, és kisebb vagy egyenlő, mint 3



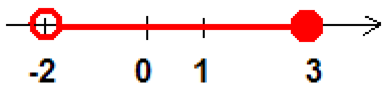
- ✓ balról zárt, jobbról nyitott

  A $[-2;3[$ azon valós számok halmaza, amelyekre *x* nagyobb vagy egyenlő, mint -2, és kisebb, mint 3.



- ✓ balról nyitott, jobbról zárt

  A $]-2;3]$ azon valós számok halmaza, amelyekre *x* nagyobb, mint -2, és kisebb vagy egyenlő, mint 3



- ✓ nyitott

  A $]-2;3[$ azon valós számok halmaza, amelyekre *x* nagyobb, mint -2, és kisebb, mint 3