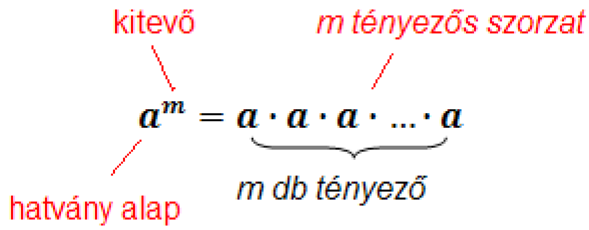
Hatványozás

DEFINÍCIÓ: Ha a tetszőleges valós szám, és m 1-nél nagyobb pozitív egész szám, akkor az $\boldsymbol{a^m}$ hatvány azt az m tényezős szorzatot jelenti, amelynek minden tényezője a. Ha m=1, akkor a definíció szerint: $a^1 = a$.



Példa:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243;$ $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125;$

$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9;$ $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27;$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27};$ $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{16}$

A hatványozás azonosságai

I. Azonosság: ***Azonos alapú hatványok szorzata*** egyenlő azzal a hatvánnyal, amelynél az alapot a kitevők összegére emeljük:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

ahol $a \in R;\ m, n \in N^+$.

II. Azonosság: ***Azonos alapú hatványok osztása*** esetén a tört egyszerűsíthető, az eredmény attól függ, hogy a számláló vagy a nevező kitevője nagyobb**:**

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & ha\ m > n, \\ 1, & ha\ m = n, \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & ha\ m < n, \end{cases}$$

ahol $a \in R; a \neq 0$ és $m,\ n \in N^+$.

III. Azonosság: ***Szorzat hatványa*** egyenlő a tényezők hatványának szorzatával:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

ahol $a, b \in R;\ n \in N^+$.

IV. Azonosság: ***Tört hatványa*** egyenlő a számláló és a nevező hatványának hányadosával:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ahol $a, b \in R;\ b \neq 0$ és $n \in N^+$.

V. Azonosság: ***Hatvány hatványa*** egyenlő azzal a hatvánnyal, amelynél az alapot a kitevők szorzatára emeljük:

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n},$$

ahol $a \in R;\ m, n \in N^+$.

Példa:

$$\frac{7^2\cdot(5^2\cdot7^3)^5}{(7^2\cdot5^3)^6}\cdot\left(\frac{5^3}{7^2}\right)^4 \quad (\text{III. és IV. azonosság}) \quad =$$

$$=\frac{7^2\cdot(5^2)^5\cdot(7^3)^5}{(7^2)^6\cdot(5^3)^6}\cdot\frac{(5^3)^4}{(7^2)^4} \quad (\text{V. azonosság, törtek szorzása}) \quad =$$

$$=\frac{7^2\cdot5^{10}\cdot7^{15}\cdot5^{12}}{7^{12}\cdot5^{18}\cdot7^8} \quad (\text{I. azonosság}) = \frac{7^{12}\cdot5^{22}}{7^{20}\cdot5^{18}} \quad (\text{II. azonosság}) \quad =$$

$$=\frac{5^4}{7^3}=\frac{625}{343}$$

Hatványozás egész kitevőre

A II. azonosság formális alkalmazása *n<k* esetre: $\mathbf{\frac{7^3}{7^5}=7^{-2}}$

Egyszerűsítéssel: $\mathbf{\frac{7^3}{7^5}=\frac{1}{7^2}}$

$\mathbf{7^{-2}=\frac{1}{7^2}}$

DEFINÍCIÓ: Ha *n* pozitív egész szám és $a\neq0$, akkor: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

A II. azonosság formális alkalmazása *n=k* esetre: $\boldsymbol{\frac{a^5}{a^5}=a^0}$

Egyszerűsítéssel: $\boldsymbol{\frac{a^5}{a^5}=1}$

$\boldsymbol{a^0=1}$

Az egyértelműség megőrzése érdekében a 0^0-t nem értelmezzük.

Példa:

$$\left(\frac{2^{-3}}{3^2}\right)^{-5}\cdot\frac{(3^{-1})^{-5}}{(2^2\cdot3^{-3})^{-3}}=\frac{2^{15}}{3^{-10}}\cdot\frac{3^{-5}}{2^{-6}\cdot3^9}=\frac{2^{15}\cdot3^{-5}}{3^{-10}\cdot2^{-6}\cdot3^9}=\frac{2^{15}\cdot3^{-5}}{2^{-6}\cdot3^{-1}}=2^{21}\cdot3^{-4}$$

$$=\frac{2^{21}}{3^4}$$

Számok normál alakja

A hatványokkal való számolás a természettudományokban gyakran előfordul, hiszen a nagyon nagy és a nagyon kicsi számok leírása hatványok segítségével egyszerűbb.
Például a fény terjedési sebessége $300000000\ \frac{m}{s}$, egyszerűbben felírva $3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$. Az alumínium lineáris hőtágulási tényezője $0{,}000024\ \frac{1}{°C}$.
A számok többféleképpen is felírhatók szorzatalakban, célszerű azt az alakot választani, amikor a 10 egész kitevőjű hatványát 1 és 10 közötti számmal szorozzuk.

DEFINÍCIÓ: Egy valós szám esetén az $a \cdot 10^k$ alakot a szám normál alakjának nevezzük, ha $1 \leq |a| < 10$ és $k \in Z$.

Példa:

$$10000 = 10^4;\ 321000000 = 3{,}21 \cdot 10^8;\ 0{,}00000000068 = 6{,}8 \cdot 10^{-10}$$