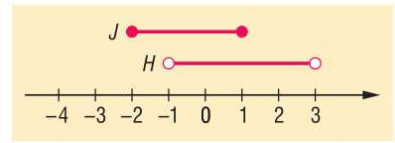


## HALMAZOK, INTERVALLUMOK

- Adott az  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  és a  $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$  halmaz.
  - Adjuk meg elemeik felsorolásával az  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  és  $B \setminus A$  halmazokat.
  - Adjunk meg úgy egy  $C$  halmazt, hogy a  $(B \setminus C) \subseteq A$  legyen.
- Adott három halmaz:  $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ ,  $B = \{a; c; d; f; i; j; k; l; m\}$ ,  $C = \{o; n; m; i; h; g; e; c; a\}$ .
  - Határozzuk meg az  $A \setminus B$ ,  $B \setminus C$ ,  $A \cap C$  és  $A \cup B$  halmazokat.
  - Határozzuk meg az  $A \setminus (B \cup C)$  halmazt.
  - Ábrázoljuk az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  halmazokat Venn-diagrammal.
- Két halmazról a következőket tudjuk:  $A \cup B = \{p; q; r; s; t; u; x; y; z\}$ ,  $A \cap B = \{x; u\}$ , valamint  $B \setminus A = \{r; t; y; z\}$ . Mely betűket tartalmazza az  $A$  halmaz?
- Adjuk meg az  $A$  halmaz elemeit, ha  $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ;  $B = \{3; 5; 7; 8\}$ ;  $A \cap B = \{3; 7\}$  és  $A \cup B = \emptyset$ .
- Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  halmazokról a következőket tudjuk:  $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$ ;  $A \setminus C = \{2; 7\}$ ;  $A \cap B = \{2; 11\}$ ;  $(B \cap C) \setminus A = \{3; 4\}$ ;  $(B \cup C) \setminus A = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$ .
  - Határozzuk meg az  $A$  halmaz elemeit.
  - Időközben azt is megtudtuk, hogy a  $B$  halmaznak csak két páratlan eleme van. Határozzuk meg  $B$  és  $C$  halmazokat is.
- Hány eleműek a következő halmazok? Soroljuk is fel az elemeket, ahol lehetséges.
  - $A = \{a \text{ „pepita zakós hegyi vízigőtepete” magánhangzói}\}$ ;
  - $B = \{az \{a; b\} \text{ halmaz összes részhalmazai}\}$ ;
- Egy társasház lakói közül 123-an gyűjtik külön csak a műanyag palackokat, 87-en csak a papírszemetet, 45-en pedig a műanyag palackokat és a papírszemetet is. Hány fő lakik a társasházban, ha saját bevallásuk szerint az említettek közül valamilyen formában mindannyian hozzájárulnak a szelektív hulladékgyűjtéshez?
- A 26 fős osztályból 15-en tanulnak norvégul, 20-an dánul. Azt is tudjuk, hogy mindenki tanulja a két nyelv legalább egyikét. Hányan tanulnak csak dánul?
- Egy 10 fős baráti társaságból 5 fő szereti a focit, 4 a kosárlabdát, egyvalaki pedig mind a két sportágot. Hányan nem kedvelik a két labdajáték egyikét sem ebből a baráti társaságból?
- Egy csoportban 13 tanuló készített matematika, 15 tanuló magyar nyelvtan házi feladatot. 8-an készítették el a házi feladatukat mindkét tantárgyból, de volt 3 olyan gyerek is, aki egyik órára sem készült.
  - Hány fős a csoport?
  - A csoportba járók hány százaléka készítette el csak a matek házi feladatát?
- Egy gyümölcsfagyaltot gyártó cég felmérte a 11/B osztály tanulóit, hogy ki szereti az eper, a málna, illetve a citrom ízű fagyaltot. A következő eredményt kapták: csak egyféle ízt összesen 13-an kedvelnek. Az epret és a málnát együtt 4, az epret és a citromot eggyel több, a citromot és málnát eggyel kevesebb fő jelezte, hogy szereti. Mindhárom ízt csak egy gyerek szereti. Hány fős az osztály, ha a felméréskor nem volt hiányzó és mindenki felemelte legalább egyszer a kezét?
- A könyvespolcon háromféle könyv van: csak verseket, csak prózát, illetve verseket és prózát is tartalmazó könyvek, mindegyikből legalább egy. Tudjuk, hogy a könyvek közül 9-ben vannak versek, és 7-ben van prózai szöveg. Hány könyv lehet a polcon?

13. a) Ábrázoljuk számegeyenesen a balról zárt és jobbról nyitott  $I = [2; 4[$  intervallumot.  
 b) Ábrázoljuk számegeyenesen a balról nyitott és jobbról zárt,  $K = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$  halmazként megadott intervallumot.  
 c) Adjuk meg intervallumként a számegeyenesen ábrázolt  $J$  intervallumot.  
 d) Adjuk meg halmazként a számegeyenesen ábrázolt  $H$  intervallumot.



14. Legyen  $A$  a tizenhatnál kisebb, nemnegatív páros számok halmaza,  $B$  a pozitív, húsznál nem nagyobb, hárommal osztható számok halmaza.  
 a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  halmazokat.  
 b) Határozzuk meg az  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B}$ ,  $\overline{A \setminus B}$  halmazokat, ha  $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 10\}$ .
15. Adott három halmaz:  $A = \{2; 4; 5; 7; 8; 9\}$ ,  $B = \{1; 7; 9; 10\}$ ,  $C = \{2; 3; 6; 7; 8; 10\}$ , valamint  $U = A \cup B \cup C$ .  
 a) Ábrázoljuk az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  halmazokat Venn-diagrammal.  
 b) Határozzuk meg a  $B \setminus A$ ,  $C \setminus B$ ,  $A \cap C$  és  $C \cup B$  halmazok elemeit.

## ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

1. Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét, ha  $a = 4$ ,  $b = -1,2$  és  $c = \frac{5}{6}$ :

a)  $6c - 2a$ ;

b)  $4a^2 - 5b$ ;

c)  $a + 6bc$ ;

d)  $-2a - 5b + 12c$ ;

e)  $\frac{-3abc}{2a+1}$ ;

f)  $2 \cdot \left( \frac{a-b}{c} + \frac{c}{a} \right)$ .

2. Vizsgáljuk meg, melyik szám a kisebb az alábbi esetekben:

a)  $2^6$  vagy  $4^4$ ;

b)  $4^8$  vagy  $8^4$ ;

c)  $9^3$  vagy  $3^9$ ;

d)  $8^5$  vagy  $16^4$ ;

e)  $6^3$  vagy  $27 \cdot 16$ ;

f)  $27^7$  vagy  $81^5$ ;

g)  $10^{15}$  vagy  $8^4 \cdot 125^5$ ;

h)  $40^{100}$  vagy  $100^{50}$ .

3. Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő kifejezések értékeit:

a)  $\frac{27 \cdot 16}{6^3}$ ;

b)  $\frac{12^5}{9^2 \cdot 4^4}$ ;

c)  $\frac{16^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2}{32^4}$ ;

d)  $\frac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{24^4 \cdot 36^3}$ ;

e)  $\left( \frac{6^6 \cdot 10^2}{9^3 \cdot 200 \cdot 32} \right)^3$ ;

f)  $\frac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{3^5 \cdot 10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2}$ .

4. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a)  $(a^7)^3 \cdot (a^4)^5$ ;

b)  $\left[ (x^2)^2 \right]^3 \cdot \left[ (x^3)^2 \right]^4$ ;

c)  $\frac{(x^3)^5 \cdot x^8}{(x^4)^3}$ ;

d)  $\frac{(b^2)^6 \cdot b^5}{(b^3)^4 \cdot (b^2)^2}$ ;

e)  $\frac{(x^4)^4 \cdot (x^5)^5}{(x^3)^3 \cdot (x^3)^2}$ ;

f)  $\frac{(a^3 \cdot b)^4 \cdot (a \cdot b^2)^3}{(a^4 \cdot b^2)^2 \cdot (a \cdot b)^3}$ ;

g)  $\left( \frac{a^2}{b} \right)^4 \cdot \left( \frac{b^3}{a^4} \right)^3 \cdot \left( \frac{a^5}{b} \right)^2$ ;

h)  $\frac{(c^4 \cdot d^3)^5 \cdot (c^7)^2 \cdot d^3}{(c^3)^2 \cdot (d^6 \cdot c^5)^4}$ .

5. Számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

a)  $3^{-4}$ ;

b)  $(-5)^{-3}$ ;

c)  $(2^{-1})^{-3}$ ;

d)  $\left( \frac{1}{7} \right)^{-2}$ ;

e)  $\left( -\frac{5}{3} \right)^{-3}$ ;

f)  $\left( \frac{4}{5} \right)^{-2}$ ;

g)  $\left[ \left( -\frac{3}{2} \right)^{-1} \right]^2$ ;

h)  $\left( -\frac{2}{5} \right)^{-2} \cdot \left( -\frac{2}{5} \right)^3$ ;

i)  $\left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{-2} \right]^{-4} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{-6}$ ;

j)  $\frac{(7^{-5})^2 \cdot (7^{-3})^{-4}}{(7^{-6})^{-2} \cdot 7^{-11}}$ .

6. a) A 2-nek hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{(2^{-5})^6}$$

b) A 3-nak hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{3^{11}}, \frac{1}{(3^{-5})^8}$$

7. Végezzük el a következő hatványozásokat, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a)  $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-2})^{-4} \cdot (a^{-1})^{-1}$ ;      b)  $(x^{-2})^{-4} \cdot [(x^3)^{-3}]^{-2} \cdot (x^2)^{-8}$ ;      c)  $(2a^{-3})^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot a^{-4}$ ;

d)  $(a^{-1} \cdot b^{-3})^{-2} \cdot (a^{-4} \cdot b^{-2})^{-1}$ ;      e)  $\left(\frac{5^{-2} \cdot b^{-1}}{b^{-4}}\right)^{-3} \cdot \frac{b^{-3}}{5^{-4}}$ ;      f)  $\frac{(c^{-3})^{-1} \cdot c^{-4} \cdot c^{-1}}{c^{-2} \cdot (c^{-3})^2 \cdot c}$ ;

g)  $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{b^{-4}}{a^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^{-1}}{a^4}\right)^{-5}$ ;      h)  $\frac{(3d^2)^{-2} \cdot (9^{-2} \cdot d^{-5})^{-2}}{(3^3 \cdot d^{-4})^3 \cdot (3d^3)^{-1}}$ ;      i)  $\frac{(12^{-3} \cdot e^{-1})^{-2} \cdot (18^2 \cdot e^3)^{-3}}{(8^{-2} \cdot e^{-4})^2 \cdot (3^{-5} \cdot e^3)^2}$ .

8. Az alábbi kifejezésekben végezzük el a lehetséges műveleteket, és rendezzük a tagokat csökkenő fokszám szerint:

a)  $3a - 2a^2 - 4 + a^2 + a - 4a^2 - 5a + 1 - a^2 + 2a$ ;

b)  $3b - b^3 + 4b^2 - 1 + 4b^3 - 2b^2 - 4b + 2 - 2b^3 - b^2 + b - 4 + 2b^2$ ;

c)  $3cd^2 - 4c^2 + d + 2c^2 - d^2c + 5d - 4cd^2 + 3 - d - c^2 - cd^2$ ;

d)  $(3a^2 - 2a + 1) - (a^2 - a - 3) - (a^2 + 5a - 2)$ ;

e)  $(2x^2 - x - 3) - (x^2 - 3x - 4) - (-2x^2 + 4x + 1) - (3x^2 - 2x - 1)$ ;

f)  $2 \cdot (a^2 - a + 1) + 3 \cdot (a^2 + 2a - 3) - 4 \cdot (a^2 + 3a + 4)$ ;

g)  $2 \cdot (x^3 - 2x^2 + 2) + 3 \cdot (x^2 + x - 1) - 4 \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 1) - (x^3 - x^2 + x + 1)$ ;

h)  $3x \cdot (2x^2 - x + 2) - 2x^2 \cdot (3x - 2) - 3 \cdot (x^3 + 2x^2 + x - 4) - x \cdot (x^2 - x - 3) + 4x^3 + 4x^2 + 2x - 4$ ;

i)  $(3a - 1) \cdot (2a + 3) - (4a - 2) \cdot (3a + 5)$ ;

j)  $2 \cdot [(3x^2 - 1) + (2x - 2) \cdot (3x - 1)] - [2x^2 + 3 \cdot (2x + 1) - x] - 3$ ;

k)  $3x - \{2x - [3x + 1 - (2x - 1)] - 3\} - \{4 - [x - (3x - 4) + 2x] + x\}$ ;

l)  $(4x + 1) \cdot (3x - 2) - 2 \cdot \{3 - 2 \cdot [(x - 3) \cdot (2x + 1) - x \cdot (3x + 1)] - x^2\} + (2x + 3) \cdot (x - 2)$ .

9. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét, ha  $a = -2$ ,  $b = \frac{2}{3}$ :

a)  $2a - 1 + 4b - a + 3b + 6 - 4a - 10b + 3a - 2$ ;

b)  $2b + 5 - 2a + 4a - 3b - 1 + 4b - 3a - 7 - 3b$ ;

c)  $(3a - 2) \cdot (a - 1) - 3a^2 + 3a - 1$ ;

d)  $(4a - b) \cdot (2a + 1) - (8a + 3) \cdot (a + 2) - 2b + 2ab$ ;

e)  $(3a - 2) \cdot (2a - b) - 6 \cdot (a - 3) \cdot (a + b) - b \cdot (11 - 9a)$ ;

f)  $4a - \{4 - [6b - 2 \cdot (a - 2) - a]\}$ .

10. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

a)  $(a + 7)^2$ ;

b)  $(8 - b)^2$ ;

c)  $(-7 + b)^2$ ;

d)  $(3y + 2x)^2$ ;

e)  $(4x - 3y)^2$ ;

f)  $(10a - 3b)^2$ ;

g)  $(x^2 + 3z)^2$ ;

h)  $(2x^3 - 3y^2)^2$ ;

i)  $(8a^3 - 5b^2)^2$ ;

j)  $\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot y\right)^2$ ;

k)  $\left(\frac{5}{6} \cdot x - \frac{7}{3} \cdot y\right)^2$ ;



11. Melyik kifejezés négyzete a következő kifejezés?

a)  $a^2 + 8a + 16$ ;

b)  $b^2 - 10b + 25$ ;

c)  $c^2 + 14c + 49$ ;

d)  $x^2 - 40x + 400$ ;

e)  $d^4 - 20d^2 + 100$ ;

f)  $x^8 + 10x^4 + 25$ ;

g)  $x^6 + 6x^3y^5 + 9y^{10}$ ;

h)  $0,25x^2 - 6xy^3 + 36y^6$ ;

i)  $\frac{4}{9} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot yx^2 + \frac{1}{16} \cdot y^2$ .

12. Végezzük el a következő műveleteket:

a)  $(3a + 5) \cdot (3a - 5)$ ;

b)  $(8x - 7) \cdot (8x + 7)$ ;

c)  $(4b - 2x) \cdot (4b + 2x)$ ;

d)  $(6a + 5b) \cdot (6a - 5b)$ ;

e)  $(5c - 3y) \cdot (5c + 3y)$ ;

f)  $(5a^3 + 1) \cdot (5a^3 - 1)$ ;

g)  $(3d^2 - 8) \cdot (3d^2 + 8)$ ;

h)  $(9x^2 + 2y) \cdot (2y - 9x^2)$ ;

i)  $(7e^5 + 10x^3) \cdot (7e^5 - 10x^3)$ ;

j)  $\left(\frac{2}{7} \cdot x^7 - \frac{1}{3} \cdot y^3\right) \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot x^7 + \frac{1}{3} \cdot y^3\right)$ .

13. Végezzük el a következő műveleteket:

a)  $(3a - 1)^2 - (2a + 3) \cdot (2a - 3) + (a + 2)^2$ ;

b)  $(4x + 3) \cdot (4x - 3) - (3x + 2)^2 + (x - 7)^2$ ;

c)  $(5x + 4)^2 - (3x - 4)^2 - (2x + 3) \cdot (2x - 3)$ ;

d)  $(x - 5)^2 - (2x + 5) \cdot (2x - 5) + (3x + 1)^2 - (2x - 1)^2$ ;

e)  $(4b - 5)^2 + 3 \cdot (4 - b) \cdot (4 + b) - (2b + 4)^2 - (4b - 3)^2$ ;

f)  $2 \cdot (5x + 1)^2 - 3 \cdot (4x - 1) \cdot (4x + 1) - 2 \cdot (x - 4)^2 - (3x + 2)^2$ ;

14. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a)  $3a^3 - 2a^2 + a$ ;

b)  $6x^3 - 10x^2 + 2x$ ;

c)  $4b^4 + 8b^3 + 28b^2 - 4b$ ;

d)  $35x^3 + 15x^2 + 20x$ ;

e)  $6a^4 - 9a^3 + 3a^2$ ;

f)  $4x^5 - 24x^4 + 12x^3$ ;

g)  $5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 10a^2b$ ;

h)  $17a^3b^5 + 17a^2b^6 - 34ab^4$ ;

i)  $16a^4b^3 + 24a^2b^4 - 40a^4b^4$ .

15. A csoportosítás módszerével alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a)  $ab + 3b - 2a - 6$ ;

b)  $2ax + bx + 2a + b$ ;

c)  $2ax + 5y + 10x + ay$ ;

d)  $ab - 8x + 4a - 2bx$ ;

e)  $6a - bx - 2b + 3ax$ ;

f)  $4ax + 2b - 8bx - a$ ;

g)  $6ax + 20b + 15a + 8bx$ ;

h)  $20bx^2 + a - 4x^2 - 5ab$ ;

i)  $9a^2 + 8b^3x^2 - 6a^2x^2 - 12b^3$ .

16. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a)  $16x^2 - 25$ ;

b)  $49a^2 - 100b^2$ ;

c)  $64b^2 - 9x^2$ ;

d)  $36x^4 - 121y^6$ ;

e)  $x^2 - 20x + 100$ ;

f)  $36a^2 - 84a + 49$ ;

g)  $\frac{4}{25} \cdot x^2 + 4x + 25$ ;

h)  $16x^4 - 1$ ;

i)  $16 - 81x^4$ ;

j)  $4a^4 + 49b^6 + 28a^2b^3$ ;

k)  $6x^2 + 12x + 6$ ;

l)  $4x^3 - 24x^2 + 36x$ ;

m)  $3x^4 + 12x^3 + 12x^2$ ;

n)  $5x^6 - 40x^4 + 80x^2$ ;

o)  $1 - x^{12}$ ;

17. Egyszerűsítsük a következő törtet:

a)  $\frac{27a^5b^2}{12a^2b^3}$ ;

b)  $\frac{3x^4 \cdot (x - 2)}{6x^3 \cdot (x - 2)}$ ;

c)  $\frac{32a \cdot (a - 5)}{24a^2 \cdot (5 - a)}$ ;

d)  $\frac{10a^4 + 30a^2}{5a^3 + 15a}$ ;

e)  $\frac{-8a^5 - 8a^3}{10a^3 + 10a}$ ;

f)  $\frac{12x^2y^2 + 20xy^3}{6x^2y + 10xy^2}$ ;

g)  $\frac{6ax + 9a + 8x + 12}{3ax + 15a + 4x + 20}$ ;

h)  $\frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 4x^2}$ ;

i)  $\frac{9x^2 - 25}{12x^2 - 20x}$ ;

18. Végezzük el a következő szorzásokat és osztásokat, és egyszerűsítsük az eredményt:

$$a) \frac{17a^3b^2}{50x^4y^2} \cdot \frac{10x^3y}{34a^2b};$$

$$b) \frac{4a^5b^2}{27x^2y^4} : \frac{32a^6b}{81xy^6};$$

$$c) \frac{x^2 + xy}{xy - y^2} \cdot \frac{xy^2 - y^3}{x^3 + x^2y};$$

$$d) \frac{20a^4 - 15a^3b}{7a^2 + 2ab} : \frac{40ab^2 - 30b^3}{14ab^3 + 4b^4};$$

$$e) \frac{ab - 3a}{a^2b + 2a^2} \cdot \frac{b^2 - 4}{b^2 - 6b + 9};$$

$$f) \frac{9b^2 - 6b + 1}{9b^2 - 1} \cdot \frac{9b^2 + 6b + 1}{3b^2 - b};$$

$$g) \frac{16 - x^2}{16x - 8x^2 + x^3} : \frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2}{4x^3 - x^4};$$

19. Végezzük el a következő algebrai törtek összevonását:

$$a) \frac{5}{2x} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{5};$$

$$b) \frac{3}{4y^2} + \frac{1}{2y} - \frac{5}{y};$$

$$c) \frac{6a+7}{a^2+a} - \frac{5}{a+1};$$

$$d) \frac{a+1}{8a+3} + \frac{5a}{24a+9};$$

$$e) \frac{x+2}{2x-1} - \frac{4x+1}{4x-2} + \frac{3-x}{10x-5};$$

$$f) \frac{2a+1}{9a+15} + \frac{a-2}{3a+5} - \frac{5a-2}{12a+20};$$

$$g) \frac{3x+1}{21-9x} + \frac{x+2}{3x-7} - \frac{x+1}{6x-14};$$

$$h) \frac{x+1}{x+2} + \frac{2x-3}{2-x} + \frac{x^2+2x+4}{x^2-4};$$

$$i) \frac{x+2}{3x+2} + \frac{3x-1}{3x-2} + \frac{3x^2+7x-2}{4-9x^2};$$

$$j) \frac{y}{y+5} - \frac{5y+9}{y^2+10y+25} - \frac{2y}{3y+15};$$

20. Számítsuk ki a következőket:

$$a) (420; 560);$$

$$b) [600; 720];$$

$$c) (972; 648);$$

$$d) [392; 448];$$

21. A törtek egyszerűsítése után végezzük el az összeadásokat:

$$a) \frac{81}{972} + \frac{32}{640};$$

$$b) \frac{112}{5040} + \frac{297}{13365};$$

$$c) \frac{135}{26460} + \frac{144}{63504}.$$