HALMAZOK

Halmaz: bizonyos dolgok összessége.

Halmaz megadása:

- Elemeinek felsorolásával
- Tulajdonság megadásával

Halmazok egyenlősége: Két halmaz egyenlő, ha azonosak az elemei.

Részhalmaz: „A” halmaz részhalmaza „B”-nek, ha „A” minden eleme „B” halmaznak is eleme.

Valódi részhalmaz: „A” halmaz valódi részhalmaza „B”-nek, ha „A” részhalmaza „B”-nek, de „A” halmaz nem egyenlő „B” halmazzal.

Üres halmaz: Egy halmazt üresnek nevezünk, ha nincs eleme. Jele: $\emptyset$ vagy { }.

Véges halmaz: Egy halmazt véges halmaznak nevezünk, ha elemeinek száma véges.

Végtelen halmaz: Egy halmazt végtelen halmaznak nevezünk, ha elemeinek száma végtelen.

HALMAZMŰVELETEK

Alaphalmaz: Alaphalmaznak nevezzük azt a halmazt, melyen belül értelmezünk különféle halmazokat.

Unió: „A” és „B” halmaz uniója azon elemek halmaza, melyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak. Jele: $A \cup B$.

Metszet: „A” és „B” halmaz metszete azon elemek halmaza, melyek mindkét halmazban benne vannak. Jele: $A \cap B$

Különbség: „A” és „B” halmaz különbsége azon elemek halmaza, melyek az „A” halmazban benne vannak, de „B”-ben nincsenek. Jele: $A \setminus B$.

Komplementer (kiegészítő) halmaz: „A” halmaz komplementere az a halmaz, melynek elemei az alaphalmazban benne vannak, de „A”-ban nincsenek. Jele: $\overline{A}$.

Véges halmazok elemeinek száma (számossága): azt adja meg, hogy hány eleme van az adott halmaznak. Csak természetes szám lehet, vagy végtelen. Jele: $|A|$.

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

ALAPMŰVELETEK

Alapműveletek: A számelmélet alapműveletei az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás.

Ellentett: Egy szám ellentettje az a szám, amellyel összeadva 0-t kapunk. Egy „a” szám ellentettje „–a”.

Reciprok: Egy szám reciproka az a szám, amellyel összeszorozva 1-et kapunk. Egy „a” szám reciproka $\frac{1}{a}$.

OSZTHATÓSÁG

Osztó: Egy „a” természetes szám osztója b egész számnak, ha van olyan k természetes szám, amelyre a·k=b. Jele a|b (ejtsd: „a” osztója „b”-nek).

Valódi osztó: egy természetes számnak az az osztója, mely nem maga a szám, és nem is 1.

Nem valódi osztó: Minden természetes szám osztható önmagával és 1-gyel, ezért ezeket nem valódi osztóknak nevezzük.

Többszörös: Ha egy „a” természetes szám osztója b természetes számnak, akkor b-t az „a” többszörösének nevezzük.

Prímszám (prím, törzsszám): Azokat a természetes számokat, melyeknek pontosan két osztójuk van (maga a szám és az 1), prímszámoknak nevezzük. (2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37...) Végtelen sok prímszám van. A 2 az egyetlen páros prímszám.

Összetett szám: Azokat a természetes számokat, melyeknek kettőnél több osztójuk van, összetett számoknak nevezzük. Tehát az 1 nem prím és nem is összetett szám, mert csak 1 db osztója van: az 1.

Prímtényezős felbontás: Ha egy természetes számot olyan szorzattá alakítunk, melyben minden tényező prím, akkor a szám prímtényezős felbontását hozzuk létre.

A számelmélet alaptétele: Minden, 1-nél nagyobb természetes szám, sorrendtől eltekintve egyértelműen (azaz pontosan egyféleképpen) bontható fel prímszámok szorzataként.

Legnagyobb közös osztó: Két vagy több természetes szám legnagyobb közös osztója az a természetes szám, mely az adott számok mindegyikének osztója, és bármely más közös osztónál nagyobb. Kiszámítása: a számok prímtényezős felbontásában szereplő *azonos* prímtényezőket, az előforduló *legkisebb* kitevőre emelve összeszorozzuk.

Legkisebb közös többszörös: Két vagy több természetes szám legkisebb közös többszöröse az a természetes szám, mely az adott számok mindegyikének többszöröse, és bármely más közös többszörösnél kisebb. Kiszámítása: a számok prímtényezős felbontásában szereplő *minden* prímtényezőt, az előforduló *legnagyobb* kitevőre emelve összeszorozzuk.

Relatív prímek: két vagy több természetes számot relatív prímeknek nevezünk, ha legnagyobb közös osztójuk az 1. A definícióból következik, hogy a relatív prímeknek nemcsak a legnagyobb, hanem az egyetlen közös osztójuk az 1. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a relatív prímeknek nincs valódi közös osztójuk.

OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

	Az osztó	Mit kell vizsgálni	A pontos szabály
I.	**2; 5; 10**	**Az utolsó számjegy**	Egy egész szám pontosan akkor osztható 2-vel / 5-tel / 10-zel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel / 5-tel / 10-zel.
II.	**4; 25; 100**	**Az utolsó két számjegy**	Egy egész szám pontosan akkor osztható 4-gyel / 25-tel / 100-zal, ha az utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel / 25-tel / 100-zal.
III.	**8; 125; 1000**	**Az utolsó három számjegy**	Egy egész szám pontosan akkor osztható 8-cal / 125-tel / 1000-rel, ha az utolsó három számjegyéből álló szám osztható 8-cal / 125-tel / 1000-rel.
IV.	**3; 9**	**A számjegyek összege**	Egy egész szám pontosan akkor osztható 3-mal / 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal / 9-cel.
V.	pl. **6**=2·3; **12**=3·4; **15**=3·5 stb.	**Szorzó szabály (az osztót relatív prímek szorzatára bontjuk)**	Egy egész szám pontosan akkor osztható relatív prímek szorzatával, ha osztható ezen relatív prímek mindegyikével

SZÁMHALMAZOK

N={természetes számok}={0; 1; 2; 3; 4; ...}

Z={egész számok}={... ; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...}

Q={racionális számok}={két egész szám hányadosaként felírható számok, ha az osztó nem 0} Racionális számok az egész számok, közönséges törtek, véges tizedestörtek és a végtelen szakaszos tizedestörtek.

Q*={irracionális számok}=}={két egész szám hányadosaként NEM felírható számok} Irracionális számok a végtelen nemszakaszos tizedestörtek. Legismertebb irracionális számok pl. a π (pi), a gyök 2.

R={valós számok}=QUQ* A valós számok az egész számegyenest folytonosan kitöltik.

ABSZOLÚT ÉRTÉK

Abszolút érték: Egy szám abszolút értéke a szám számegyenesen mért 0-tól való távolságával egyezik meg. Nemnegatív szám abszolút értéke önmaga, negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje.

Normálalak: Egy szám normálalakját megkapjuk, ha a számot olyan kéttényezős szorzattá bontjuk, melyben az egyik tényező egy 1-nél nemkisebb, 10-nél kisebb szám, másik tényezője pedig 10-nek valamely egész kitevőjű hatványa.

HATVÁNYOZÁS

Pozitív egész kitevőjű hatvány: Ha „a" bármilyen valós szám, „n" pedig pozitív egész szám, , akkor a^n („a" az „n"-ediken) azt az n-tényezős szorzatot jelöli, melynek minden tényezője „a".

Nulla kitevőjű hatvány: Bármely (nem nulla) szám 0-dik hatványa 1: $\boxed{a^0 = 1}$, ha $a \neq 1$.

Negatív kitevőjű hatvány: $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

Törtkitevőjű hatvány: $\boxed{a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}}$

A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI

Azonos alapú hatványok

$\boxed{a^n \cdot a^k = a^{n+k}}$ Azonos alapú hatványok úgy is szorozhatók, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

$\boxed{\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}}$ Azonos alapú hatványok úgy is eloszthatók, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.

$\boxed{(a^n)^k = a^{nk}}$ Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$\boxed{\sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}}$ Hatványból úgy is vonhatunk gyököt, hogy az alapot arra a hatványra emeljük, melynek kitevője az eredeti hatványkitevő és a gyökkitevő hányadosa.

Szorzat, hányados hatványozása

$\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$ Szorzatot úgy is hatványozhatunk, hogy a tényezőket a közös kitevőre emelve összeszorozzuk.

$\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$ Törtet úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt a közös kitevőre emeljük, majd e hatványokat elosztjuk egymással.

NEVEZETES SZORZATOK

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

GYÖKVONÁS

Négyzetgyök: egy nemnegatív „a" szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, melynek négyzete „a"

n-edik gyök (ha n páros): egy nemnegatív „a" szám n-edik gyöke az a nemnegatív szám, melynek n-edik hatványa „a"

n-edik gyök (ha n páratlan): egy valós „a" szám n-edik gyöke az a valós szám, melynek n-edik hatványa „a"

A GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

Szorzat gyöke: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Hányados gyöke: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Hatvány gyöke: $\sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}$

Gyök gyöke: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Hatvány gyöke, gyök hatványa:

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

EGYENLETEK, EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Egyenlet: Ha két algebrai kifejezés közé egyenlőségjelet teszünk, egyenletet kapunk. Azokat a számokat, melyeket az egyenletben levő betűk helyébe írva az egyenlőség teljesül, az egyenlet megoldásainak vagy gyökeinek nevezzük.

Alaphalmaz: Egy egyenlet alaphalmazának nevezzük azt a halmazt, amelyben az egyenlet gyökeit (megoldásait) keressük.

Megoldáshalmaz: Egy egyenlet gyökeinek halmazát az egyenlet megoldáshalmazának nevezzük.

EGYENLETMEGOLDÁSI MÓDSZEREK

Mérlegelv: Ha egy egyenlet

- mindkét oldalához hozzáadjuk ugyanaz a számot vagy algebrai kifejezést, vagy
- mindkét oldalából kivonjuk ugyanaz a számot vagy algebrai kifejezést, vagy
- mindkét oldalát beszorozzuk ugyanazzal a nem 0 számmal vagy algebrai kifejezéssel, vagy
- mindkét oldalát leosztjuk ugyanazzal a nem 0 számmal vagy algebrai kifejezéssel,

akkor az egyenlőség igaz marad.

Grafikus módszer: Az egyenlet két oldalán álló függvényt azonos koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Az egyenlet megoldásai a két grafikon közös pontjainak x koordinátái.

KÉTISMERETLENES EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Behelyettesítő módszer: Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, majd ezt behelyettesítjük a másik egyenletbe. Így egy ismeretlenünk lesz, azt kiszámoljuk, majd visszahelyettesítjük valamelyik eredeti egyenletbe.

Egyenlő együtthatók módszere: Az egyenleteket úgy szorozzuk be valamilyen számmal, hogy valamelyik ismeretlen együtthatói a két egyenletben megegyezzenek, vagy egymás ellentettjei legyenek. Ezután a két egyenletet kivonjuk egymásból, vagy összeadjuk egymással. Így egy ismeretlenünk lesz, azt kiszámoljuk, majd visszahelyettesítjük valamelyik eredeti egyenletbe.

MÁSODFOKÚ EGYENLET

A másodfokú egyenlet 0-ra redukált általános alakja:

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diszkrimináns:
A másodfokú egyenlet megoldóképletében a gyök alatti kifejezést diszkriminánsnak nevezzük.

$D = b^2 - 4ac$

Ha $D > 0 \Rightarrow$ két különböző valós gyöke van a másodfokú egyenletnek
Ha $D = 0 \Rightarrow$ két azonos (azaz egy) valós gyöke van a másodfokú egyenletnek
Ha $D < 0 \Rightarrow$ nincs valós gyöke a másodfokú egyenletnek

Viète-formulák
(a gyökök és együtthatók kapcsolatáról):

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

KÖZÉPÉRTÉKEK

Számtani közép: Két szám számtani közepe a két szám összegének fele.

Mértani közép: Két szám mértani közepe a két szám szorzatának négyzetgyöke.

Kapcsolat a számtani és mértani közép között: Két nemnegatív szám számtani közepe mindig legalább akkora, mint a mértani közepe. A két középérték pontosan akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő.

GEOMETRIA

SÍKGEOMETRIA

Szög: Egy pontból kiinduló két félegyenes által határolt síkrészt szögtartománynak vagy szögnek nevezzük.

Szögfajták: nullszög, egyenesszög, derékszög, tompaszög, egyenesszög, homorúszög, teljes szög, forgásszög. (Definíciójukat lásd a tankönyvekben vagy szakszerű honlapokon.)

Nevezetes szögfajták:
Párhuzamos szárú szögek:

- Egyállású szögek: olyan szögek, melyek szárai páronként párhuzamosak és egyirányúak. Az egyállású szögek egyenlőek.
- Társszögek (kiegészítő szögek): olyan szögek, melyek szárai páronként párhuzamosak, és egyik száruk egyirányú, másik száruk ellentétes irányú. Összegük 180°.
- Mellékszögek: a társszögek speciális esete, amikor a két szög egyirányú szögszára egybeesik.
- Váltószögek: olyan szögek, melyek szárai páronként párhuzamosak és ellentétes irányúak. A váltószögek egyenlőek.
- Csúcsszögek: a váltószögek speciális esete, amikor a két szög csúcsa egybeesik, száraik pedig egymás meghosszabbításai.

Merőleges szárú szögek: olyan szögek, melyeknek szárai páronként merőlegesek. A merőleges szárú szögek vagy egyenlőek, vagy 180°-ra egészítik ki egymást.

TÉRELEMEK TÁVOLSÁGA

Két pont távolsága: a pontokat összekötő egyenes szakasz hossza.

Egy pont és egyenes távolsága: a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.

Két egymást metsző egyenes, ill. két egybeeső egyenes távolsága 0.

Két párhuzamos egyenes távolsága: az egyik egyenes egy pontjából a másik egyenesre állított merőleges szakasz hossza.

Egy pont és egy sík távolsága: a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos sík távolsága: az egyik sík egy pontjából a másik síkra állított merőleges szakasz hossza.

TÉRELEMEK HAJLÁSSZÖGE

Két metsző egyenes hajlásszöge: az általuk bezárt szögek közül a derékszögnél nemnagyobb szög.

Két kitérő egyenes hajlásszöge: egy tetszőleges ponton átmenő, velük párhuzamos egyenesek hajlásszöge.

Egyenes és egy általa metszett sík hajlásszöge: az egyenes és a síkra eső merőleges vetületének hajlásszöge.

Egyenes és vele párhuzamos (vagy rá illeszkedő) sík hajlásszöge 0°.

Két, egymást metsző sík hajlásszöge: A két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában a két sík mindegyikén merőlegest állítunk a metszésvonalra. Az így kapott két egyenes hajlásszöge a két sík hajlásszöge.

Két párhuzamos (vagy egybeeső) sík hajlásszöge 0°.

NEVEZETES PONTHALMAZOK

Kör: egy adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon.

Gömb: egy adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben.

Szakaszfelező merőleges: egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon.

Szögfelező: egy szög száraitól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a szögfelező síkjában.

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK – EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés
- Párhuzamos eltolás
- Pont körüli forgatás

Egy alakzat **tengelyesen szimmetrikus**, ha létezik olyan egyenes, amelyre az alakzatot tükrözve az alakzat képe önmaga.

Egy alakzat **középpontosan szimmetrikus**, ha létezik olyan pont, amelyre az alakzatot tükrözve az alakzat képe önmaga.

Egy alakzat **forgásszimmetrikus**, ha létezik olyan pont, amely körül 360° egész számú többszöröseitől különböző szöggel való elforgatással keletkező képe önmaga.

HASONLÓSÁG

Hasonló síkidomok területe, hasonló testek felszíne, térfogata

- Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete.
- Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete.
- Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.

HÁROMSZÖGEK

Háromszögek csoportosítása oldalak szerint:

- **Általános háromszög**: olyan háromszög, melynek minden oldala különböző.
- **Egyenlő szárú háromszög**: olyan háromszög, melynek van két egyenlő oldala. A két egyenlő oldalt száraknak, a harmadik oldalt alapnak nevezzük. A szárak által bezárt szöget szárszögnek nevezzük.
- **Egyenlő oldalú (más néven szabályos) háromszög**: olyan háromszög, melynek mindhárom oldala egyenlő.

Háromszögek csoportosítása szögek szerint:

- **Hegyesszögű háromszög**: olyan háromszög, melynek legnagyobb szöge hegyesszög.
- **Derékszögű háromszög**: olyan háromszög, melynek legnagyobb szöge derékszög. A derékszög szárait alkotó oldalakat befogóknak, a derékszöggel szemközti oldalt átfogónak nevezzük.
- **Tompaszögű háromszög**: olyan háromszög, melynek legnagyobb szöge tompaszög.

Háromszög-egyenlőtlenség: bármely háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

Bármely háromszögben igaz:

- A belső szögek összege 180°.
- A külső szögek összege 360°.
- Egy belső és egy mellette levő külső szög összege 180°.
- Egy külső szög egyenlő a két nem mellette levő belső szög összegével.

Egyenlő szárú háromszögek tulajdonságai:

- Az alapon fekvő szögek egyenlők. – Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot és a szárak szögét.

Egyenlő oldalú háromszögek tulajdonságai:

- Minden szöge egyenlő. – Minden magassága egyenlő. – A magasságvonalak, súlyvonalak, oldalfelező merőlegesek, szögfelezők egybeesnek.

HÁROMSZÖGEK NEVEZETES VONALAI

- Háromszög **magasság**ának egy csúcsból a szemközti oldalra bocsátott merőleges szakasz hosszát nevezzük. A háromszög magasságvonali egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög magasságpontja.

- Háromszög **oldalfelező merőleges**ének a háromszög két csúcsától egyenlő távolságra levő pontok halmazát nevezzük a háromszög síkjában. A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

- Háromszög **szögfelező**jének a háromszög két oldalától egyenlő távolságra levő pontok halmazát nevezzük. A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a beírható kör középpontja.

- Háromszög **súlyvonal**ának egy csúcsból a szemközti oldal felezőpontjába húzott szakaszt nevezzük. A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög súlypontja. A súlypont 1:2 arányban osztja a súlyvonalakat.

- Háromszög **középvonal**ának az oldalfelező pontokat összekötő szakaszokat nevezzük. A háromszög középvonalai párhuzamosak a nem felezett oldalakkal, és fele olyan hosszúak.

DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK TÉTELEI

Pitagorasz-tétel: Derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

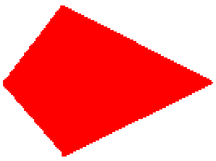
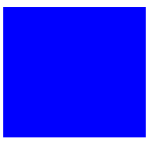
Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság négyzete az átfogó két szeletének szorzatával egyenlő.

Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának négyzete egyenlő az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének szorzatával.

NÉGYSZÖGEK

A négyszögek belső szögeinek összege és külső szögeinek összege is 360°.

Speciális négyszögfajták

név	ábra	<u>definíció</u>: olyan négyszög, amelynek…	oldalak	szögek	átlók	terület
trapéz		van párhuzamos oldalpárja (ezek neve: alapok, másik két oldal: szár)	alapok párhuzamosak	szárakon társszögek	–	$\frac{a+c}{2}m$
húrtrapéz (szimmetrikus trapéz, körbe írható trapéz)		van párhuzamos oldalpárja és szimmetrikus az alap felezőmerőlegesére	alapok párhuzamosak, szárai egyenlőek	alapokon egyenlők, szárakon társszögek	egyenlőek	$\frac{a+c}{2}m$
paralelogramma		két párhuzamos oldalpárja van	szemközti oldalak egyenlőek	szemköztiek egyenlők, szomszédosak társszögek	felezik egymást	am_a bm_b $ab\sin\alpha$
deltoid		két-két szomszédos oldala egyenlő	két-két szomszédos oldala egyenlő	egyik szemközti szögpár egyenlő	merőlegesek, a szimmetriaátló felezi a másikat	$\frac{ef}{2}$
rombusz		minden oldala egyenlő	szemközti oldalak egyenlőek, párhuzamosak	szemköztiek egyenlők, szomszédosak társszögek	merőlegesen felezik egymást	$\frac{ef}{2}$ am $a^2\sin\alpha$
téglalap		minden szöge egyenlő	szemközti oldalak egyenlőek, párhuzamosak	egyenlőek	egyenlőek, felezik egymást	ab
négyzet		oldalai és szögei egyenlőek	egyenlők, szemköztiek párhuzamosak	egyenlőek	egyenlők, merőlegesen felezik egymást	a^2

SOKSZÖGEK

Egy n oldalú konvex sokszög

- átlóinak száma n(n-3)/2
- belső szögeinek összege (n-2)180°
- külső szögeinek összege 360°

Szabályos sokszög: olyan sokszög, melynek oldalai és szögei is egyenlőek.

KÖR

Kör (körvonal): Egy adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon. Az adott pont a kör középpontja, az állandó távolság a kör sugara.

Nyílt/zárt körlap: A kör középpontjától a sugaránál kisebb/nemnagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban.

A kör részei

Húr: A körvonal két pontját összekötő szakaszt a kör húrjának nevezzük.

Átmérő: A kör középpontján átmenő húrját átmérőnek nevezzük.

Szelő: A körvonal két pontján átmenő egyenest szelőnek nevezzük.

Érintő: Azt az egyenest, melynek pontosan egy közös pontja van a körrel, a kör érintőjének nevezzük. Az érintő és a kör közös pontját érintési pontnak nevezzük. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

Körcikk: A kör két sugara és egy köríve által határolt részét körcikknek nevezzük.

Körszelet: A kör egy húrja és egy köríve által határolt részét körszeletnek nevezzük.

Körgyűrű: Két azonos középpontú körvonal által határolt síkidom.

Szögek mérése fokban, radiánban:
Minden szög fokon kívül radiánban is mérhető, mely az adott szöghöz tartozó egységnyi sugarú körív hossza.
A 180°-os szög radiánban π. Ezzel arányosan kifejezhető bármely szög nagysága fokban is, és radiánban is.

Középponti szög: olyan szög, melynek csúcsa egy kör középpontja, szárai a kör sugarai.

Kerületi szög: olyan szög, melynek csúcsa egy körvonal egy pontja, szárai a kör húrjai.

Egy kör valamely középponti szöge mindig kétszer akkora, mint az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szög.

Thalész-tétel:
Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal bármely más pontjával, derékszögű háromszöget kapunk.

Thalész-tétel megfordítása:
Derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontjában van.

TRIGONOMETRIA

HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEK DEFINÍCIÓJA DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGBEN

Szinusz: Derékszögű háromszög egy hegyesszögének szinusza egyenlő a szöggel szemközti befogónak és az átfogónak a hányadosával.

Koszinusz: Derékszögű háromszög egy hegyesszögének koszinusza egyenlő a szög melletti befogónak és az átfogónak a hányadosával.

Tangens: Derékszögű háromszög egy hegyesszögének tangense egyenlő a szöggel szemközti befogónak és a szög melletti befogónak a hányadosával.

Kotangens: Derékszögű háromszög egy hegyesszögének kotangense egyenlő a szög melletti befogónak és a szöggel szemközti befogónak a hányadosával.

SZÖGFÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ AZONOSSÁGOK

A Pitagorasz-tétel trigonomterikus alakja:

$$sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$$

Pótszögekre vonatkozó azonosságok:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha)$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$$

Tangens és kotangens:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

	30°	*45°*	*60°*
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	*1*	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

KERÜLET, TERÜLET

Egy síkidom kerülete az síkidomot határoló vonal hossza.
Egy sokszög kerülete a sokszög oldalainak összege.

Háromszög területe:

- bármely oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele
- bármely két oldal és a közbezárt szög szinusza szorzatának a fele
- Heron-képlet

Nevezetes négyszögek területe (lásd a Négyszögek c. pontban levő táblázatot)

Szabályos sokszögek területe: pl. a köré írható kör sugarának ismeretében, a sugár által alkotott háromszögekre bontva.

Kör kerülete: $K=2r\pi$. (r a kör sugara, π a Ludolph-féle szám)

Kör területe: $T=r^2\pi$. (r a kör sugara, π a Ludolph-féle szám)

Körcikk területe: a kör területének annyiad része, ahányad része a körcikk középponti szöge a 360°-nak.

Körszelet területe: a körcikk területéből a középponti háromszög területe.

VEKTOROK

Az irányított szakaszokat **vektor**oknak nevezzük. Három fő tulajdonsága van, amivel megadhatunk egy adott vektort: abszolút érték, állás, irány.

Egy **vektor abszolút értékén** a vektor hosszát értjük.

Azt a vektort, amelynek kezdőpontja egybeesik a végpontjával, zérusvektornak vagy **nullvektor**nak nevezzük, jele **0**. A zérusvektor abszolútértéke nulla, állása, iránya tetszőleges.

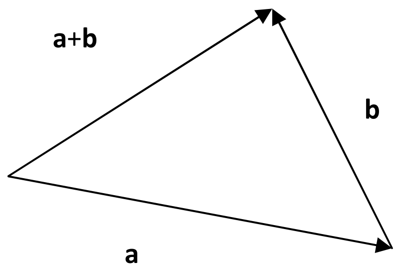
Két vektor szögén az irányukat jellemző félegyenesekkel mint szögszárakkal meghatározott kisebbik szöget értjük.

Egyállású vektoroknak nevezzük azokat a vektorokat, amelyekhez található egy olyan egyenes, amely mindegyikőjükkel párhuzamos. Egysíkú vektoroknak nevezzük azokat, amelyekhez találhatunk olyan síkot, amely mindegyikkel párhuzamos.

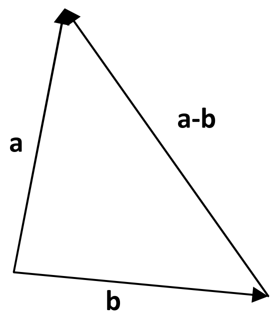
Két vektor csak akkor **egyenlő**, ha abszolútértékük egyenlő, egyállásúak és azonos irányúak.

Két vektor egymás ellentettje, ha abszolútértékük egyenlő, egyállásúak és ellentétes irányúak.

MŰVELETEK VEKTOROKKAL



Vektorok összege
Két vektor összeadásánál egy pontból kiindulva felmérjük az egyik vektort, majd ennek végpontjába a másik vektort. A két vektor összege az a vektor, amely az első kezdőpontjából a másik végpontjába mutat. Több vektor összeadása esetén először két vektort összegzünk, majd az összeghez hozzáadunk egy újabb vektort. A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív művelet.



Vektorok különbsége
Két vektor különbsége az azzal a vektorral egyenlő, amelynek kezdőpontja a kivonandó vektor végpontja, a végpontja a kisebbítendő vektor végpontja.
Gyakran használjuk még a paralelogramma-módszert. A két vektort közös kezdőpontban felvesszük, majd eltoljuk az egyiket a másik végpontjába. Ezt a műveletet mindkét vektorral végrehajtjuk. Az így kapott paralelogrammáról egyszerre olvashatjuk le a két vektor összegét és különbségeit is.

Vektor szorzása számmal
Amikor vektorok és számok együtt szerepelnek, akkor a számot skalár mennyiségnek, röviden skalárnak nevezzük. Adott egy a vektor és egy λ (λ ε R). A λa vektor abszolútértéke | λ||a|, egyállású a-val és iránya,
ha a = 0, akkor λa = 0,
Ha a ≠ 0, akkor:
ha 0 < λ, akkor az a iránya,
ha λ < 0, akkor az a irányával ellentétes,
ha λ = 0, akkor a λa = 0.
Ha |λ|<1, akkor az a kicsinyítéséről beszélünk, ha |λ|>1, akkor pedig a nagyításáról.

Két vektor skaláris (belső) szorzata
A fizikában értelmezett munkát az erő és az út szorzata határozza meg, tehát két vektormennyiségből egy skalárt kapunk. Két vektorból ezen a módon képzett skalár a vektoralgebrában és a geometriában is használhatónak bizonyul.

Definíció: A a és b vektor skaláris szorzatán azt a szorzatot értjük, amelyben a két vektor abszolút értékét megszorozzuk hajlásszögük cosinusával.

$$ab = |a||b|\cos(a,b)$$

Ha az egyik tényező zérusvektor, akkor a hajlásszög nem egyértelmű, de ez nem zavaró, mivel az abszolút értéke nulla, így a skaláris szorzat is nulla.

Tétel: Két nem zérusvektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor merőleges egymásra. Az a skaláris szorzás, amelyikben zérusvektor szerepel biztosan nulla.

KOORDINÁTA GEOMETRIA

A helyvektor definíciójából kiindulva rögzítsük egy vektor kezdőpontját a koordinátarendszer origójába, végpontja pedig legyen a koordinátasík egy tetszőleges P pontja. Ekkor az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor koordinátája megegyezik a végpont koordinátájával.

MŰVELETEK A HELYVEKTOROKKAL

Helyvektorok összegének koordinátái az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak az összege adja meg: $\mathbf{a}(x_1;y_1)\,;\mathbf{b}(x_2;y_2) \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}(x_1+x_2;y_1+y_2)$

Helyvektorok különbségének koordinátái: $\mathbf{a}(x_1;y_1)\,;\mathbf{b}(x_2;y_2) \Rightarrow \mathbf{a}-\mathbf{b}(x_1-x_2;y_1-y_2)$

Vektor szorzása számmal: Egy vektor skalárszorosának koordinátái az eredeti vektor koordinátáinak skalárral történő szorzatával egyenlő.

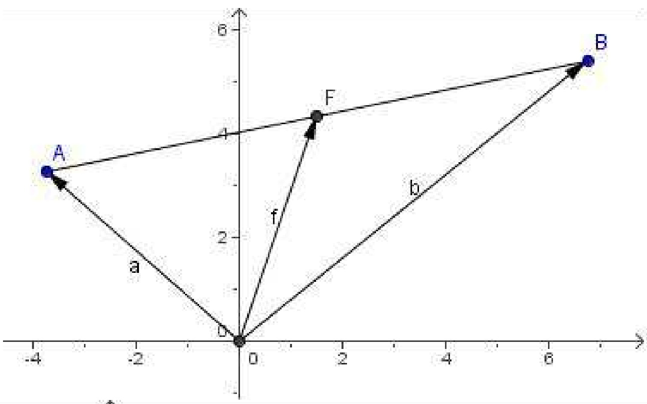
Vektorok skaláris szorzata: $\mathbf{a}(x_1;y_1)\,;\mathbf{b}(x_2;y_2) \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$

Egy vektor hosszának kiszámolása: $\mathbf{v}(x;y)$ vektor hossza $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$

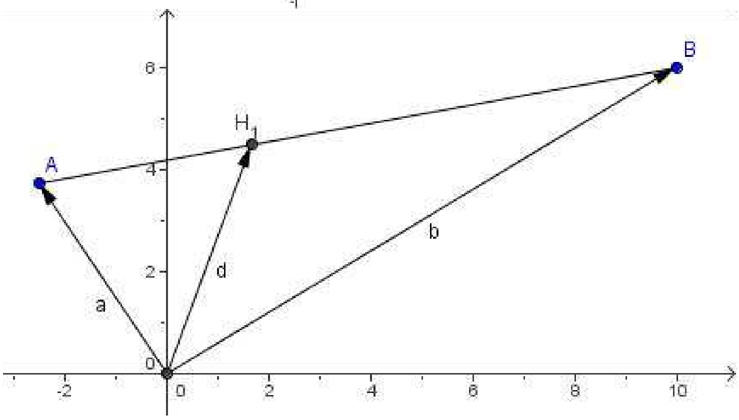
Tetszőleges AB szakasz hosszának megadása: $A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ $\mathbf{a}(x_1;y_1)$ $\mathbf{b}(x_2;y_2)$

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1) \quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Az $A(x_1;y_1)$ és $B(x_2;y_2)$ végpontú szakasz F felezőpontjának koordinátái: $F\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

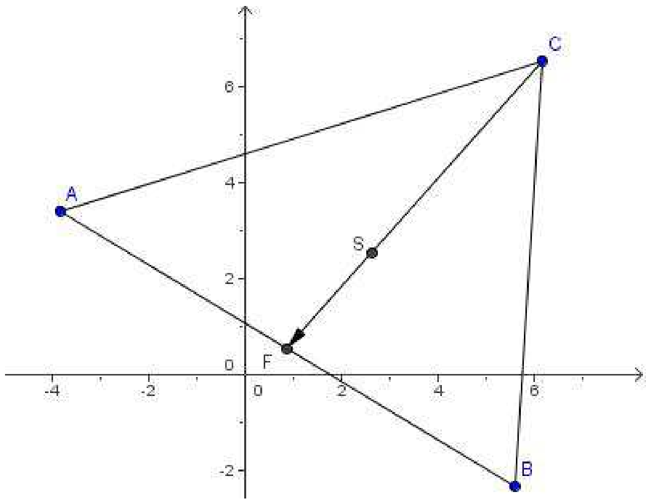


Az $A(x_1;y_1)$ és $B(x_2;y_2)$ végpontú szakasz H1, A-hoz közelebbi harmadolópontjának koordinátái: $H\left(\frac{2\cdot x_1+x_2}{3};\frac{2\cdot y_1+y_2}{3}\right)$.



Az $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ csúcspontú háromszög súlypontjának koordinátái:

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$



AZ EGYENES HELYZETÉT JELLEMZŐ ADATOK

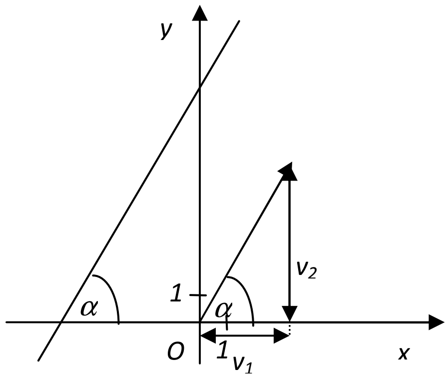
Irányvektor: Az egyenessel párhuzamos vektor, amely nem nullvektor. Jele: $\underline{v}(v_1;v_2)$

Normálvektor: Az egyenesre merőleges vektor, amely nem nullvektor. Jele: $\underline{n}(A;B)$

Egy egyenes irányvektorai és normálvektorai mindig merőlegesek egymásra.

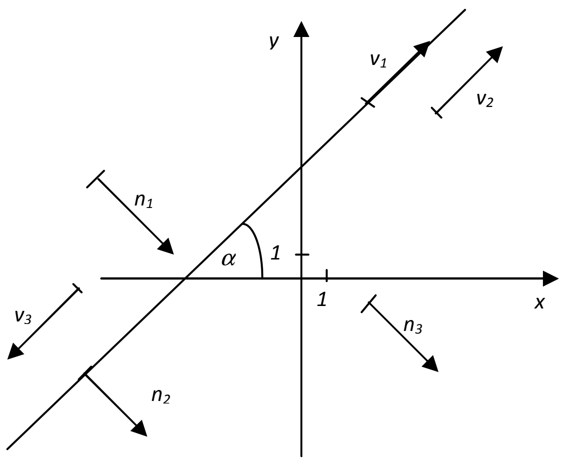
Irányszög: Az irányvektor x tengely pozitív irányával bezárt szöge. Jele: α

Iránytangens: Az egyenes irányszögének tangense, ha létezik. Jele: $m = \mathrm{tg}\alpha$ $\cos\alpha \neq 0$



Valamely egyenes irányszöge azonos az irányvektorának és az x tengelynek a hajlásszögével. Ha az irányszöget a $-90° < \alpha < 90°$ intervallumra korlátozzuk, akkor az irányszög tangensét megadja az irányvektor két koordinátájának hányadosa.

$$m = tg\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$



Egy egyenesnek végtelen sok irányvektora van, ezek egymástól különböző skalárszoros vektorok.

Egy egyenesnek végtelen sok normálvektora van, ezek egymástól különböző skalárszoros vektorok.

Úgy lehet megadni egy tetszőleges vektorra merőleges vektort, hogy az eredeti vektor koordinátáit felcseréljük és az egyiket megszorozzuk (-1)-gyel.
Ezzel a módszerrel lehet irányvektor segítségével az egyenes normálvektorait, illetve normálvektor segítségével az irányvektorait megadni.

Két egyenes párhuzamos, ha

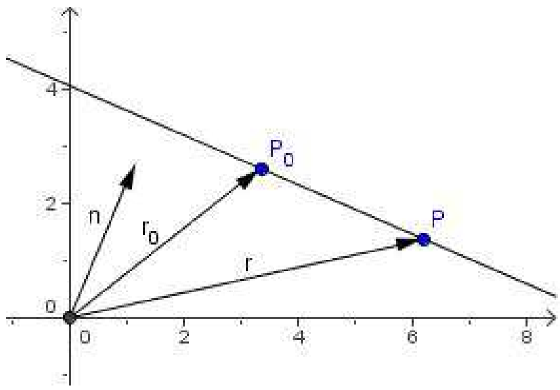
- normálvektoraik párhuzamosak;
- irányvektoraik párhuzamosak;
- irányszögük egyenlő;
- iránytényezőjük egyenlő (ha van).

Két egyenes merőleges, ha

- normálvektoraik merőlegesek → normálvektoraik skaláris szorzata 0;
- irányvektoraik merőlegesek → irányvektoraik skaláris szorzata 0;
- a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenesek iránytényezőinek szorzata −1.

Egyenest meghatározhatunk, ha ismerjünk az egyenes egy pontját és

- Egy másik pontját
- Irányvektorát
- Normálvektorát
- Irányszögét / iránytangensét
- Meredekségét



$\underline{n}(A;B)$ $P_0(x_0;y_0)$ $P(x;y)$

Az egyenes normálvektoros egyenlete:

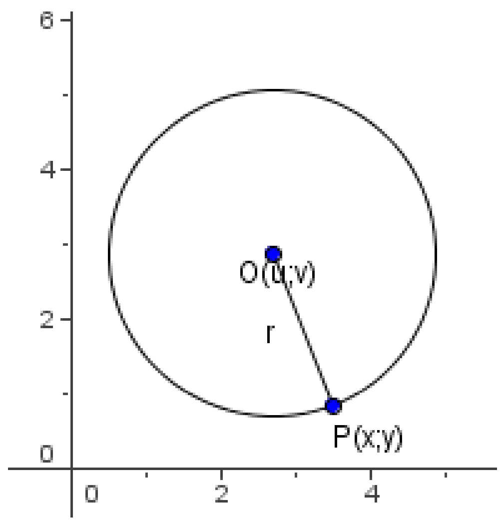
$Ax + By = Ax_0 + By_0$

Két egyenes metszéspontját úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert.

A KÖR

A körvonal és a körlap között fogalmi különbség van, de gyakran mindkettőt körnek nevezzük. Ebben a témában kör alatt körvonalat értünk. A kör azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott O pontjától, a kör középpontjától, egyenlő távolságra vannak. Ez a távolság a kör sugara, jele: r.

Az $O(u;v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.



STATISZTIKA

Statisztikai sokaság, minta

A **statisztika** tömegjelenségekben érvényesülő tapasztalati törvényeket tár fel a sokaság részhalmazain (mintákon) elvégzett mérésekre alapozva.

Statisztikai sokaságnak nevezzük az objektumok, események azon összességét, amelyre a statisztikai vizsgálat vonatkozik. A statisztikai sokaság tagjait egyedeknek, a sokaságot alkotó egyedek számát pedig a statisztikai sokaság méretének nevezzük.

Az egyedek vizsgált tulajdonságait ismérveknek, az ismérv egy konkrét előfordulását pedig adatnak nevezzük.

Statisztikai mintának nevezzük a statisztikai sokaság azon – valódi – részhalmazát, amelyről adatokkal rendelkezünk.

A statisztikai mintával szemben alapkövetelmény, hogy reprezentatív legyen, azaz hűen tükrözze azt a sokaságot, amelyből való, és a lehető legtöbb információt nyújtsa a vizsgált ismérvvel kapcsolatos ismeretlen eloszlásról.

Gyakoriság, gyakorisági eloszlás, osztályokba sorolás

Egy adat (abszolút) **gyakoriság**án azt a számot értjük, ahányszor az adat a mintában előfordul.

A **gyakorisági táblázat** a lehetséges adatokat és azok gyakoriságait tartalmazza.

Egy adat **relatív gyakoriság**án gyakoriságának és a minta elemszámának hányadosát értjük. A relatív gyakoriság százalékban kifejezett értékét százalékos gyakoriságnak nevezzük.

Adatok ábrázolása, rendszerezése

A minta adatainak jól megválasztott elrendezésével, ábrázolásával megkönnyíthetjük a vizsgálati szempontoknak megfelelő következtetések meghozatalát.

Táblázat: Az adatok áttekinthetőbbé, könnyebben feldolgozhatóvá válnak, ha táblázatba rendezzük őket.

A **grafikon**ok általában sokkal szemléletesebbek a táblázatoknál, sűrítik az információt, átláthatóbbá teszik az adathalmazt. A hasonlóságok és különbségek könnyen észrevehetővé válhatnak.

Fontosabb grafikontípusok

- **Görbe, vonaldiagram**: Derékszögű koordináta-rendszerben görbékkel vagy összefüggő törött vonallal szemléltetjük az adatok változását, egymáshoz való viszonyát.
- **Oszlopdiagram**: Az ábrázolandó mennyiséggel arányos magasságú téglalapok (oszlopok) alkotják. Az oszlopok szélessége egyenlő, de szabadon megválasztható. Akkor használjuk, ha az adatok változását, egymáshoz való viszonyát akarjuk szemléltetni.
- **Kördiagram**: Általában relatív gyakoriságok ábrázolására használjuk. Egy körben az ábrázolandó adatok relatív gyakoriságaival arányos középponti szögű körcikkek alkotják. A teljes kör jelenti a 100%-ot. A kördiagramon az egyes adatok gyakoriságát is fel lehet tüntetni.
- **Tortadiagram**: A kördiagram térbeli megfelelője. A térbeli elforgatás miatt torzítja a középponti szögeket, ami megnehezíti az összehasonlításokat.

Középértékek

- A mintában leggyakrabban előforduló adatot a minta **módusz**ának nevezzük. Ha több ilyen van, akkor azok a móduszok halmazát alkotják.
- A minta nagyság szerint rendezett adatai közül a középsőt **medián**nak nevezzük. Páratlan számú adat mediánján a középső adatot értjük. Páros számú adat mediánja a két középső adat számtani közepe.
- A statisztikai minta $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ adatainak **számtani közepe**:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$